	U N I V E R S I T Ä T **KOBLENZ · LANDAU**	Fachbereich 3: Naturwissenschaften M A T H E M A T I S C H E S I N S T I T U T **Dr. Ingrid Hupp**

Übung zur Vorlesung

Diskrete algebraische Strukturen

Dozent: Prof. Dr. Kalhoff

Übungsleiter: Dr. Ingrid Hupp

Inhaltsverzeichnis

	UNIVERSITÄT KOBLENZ · LANDAU	Fachbereich 3: Naturwissenschaften MATHEMATISCHES INSTITUT **Dr. Ingrid Hupp**

1. Übungsblatt zu „Diskrete algebraische Strukturen“

Ausgabe 25.10.2000
Abgabe 8.11.2000

1. Beweisen Sie durch vollständige Induktion, daß für jede natürliche Zahl n gilt $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$.

2. Beweisen Sie durch vollständige Induktion, daß für jede natürliche Zahl n gilt $\prod_{k=1}^{n} k^k \le n^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

3. Beweisen Sie durch vollständige Induktion, daß für alle $n \in \mathbf{N}$ gilt: $n^7 - n$ ist durch 7 teilbar.

4. Beweisen Sie durch vollständige Induktion, daß für alle reellen $x \neq 1$ und jede natürliche Zahl n gilt $\sum_{k=o}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

5. Bestimmen Sie ein $n_0 \in N$, so daß für alle $n \geq n_o$ gilt $2^n > n^4$. Beweisen Sie diesen Sachverhalt durch vollständige Induktion.

6. Beweisen Sie durch vollständige Induktion, daß für alle $n \in \mathbf{N}$ gilt: $5^{2n} + 24n - 1$ ist durch 48 teilbar.

Schriftlich zu bearbeiten und abzugeben sind die Aufgaben Nr. 1, 2 und 3.

„Diskrete algebraische Strukturen“
Lösung zum 1. Übungsblatt

Aufgabe 1:

Induktionsvoraussetzung: $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$

Induktionsanfang: n = 1 $\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 2*1-1 = 1 = 1^2$ ✓

Induktionsschluß: n → n + 1 $\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + 2*(n+1)-1$

= I.A. = $n^2+2n+2-1 = (n+1)^2$ q.e.d.

Aufgabe 2:

Induktionsvoraussetzung: $\prod_{k=1}^{n} k^k \leqslant n^{\frac{n(n+1)}{2}}$

Induktionsanfang: n = 1 $\prod_{k=1}^{1} k^k = 1^1 = 1 \leqslant 1^{\frac{1*2}{2}}$ ✓

Induktionsschluß: n → n + 1 $\prod_{k=1}^{n+1} k^k = \left(\prod_{k=1}^{n} k^k\right)*(n+1)^{n+1}$

= I.A. = $n^{\frac{n(n+1)}{2}}*(n+1)^{n+1} \leqslant (n+1)^{\frac{n(n+1)}{2}}*(n+1)^{n+1}$

$= (n+1)^{\frac{n(n+1)}{2}}*(n+1)^{\frac{2(n+1)}{2}}$

$= (n+1)^{\frac{n(n+1)}{2}+\frac{2(n+1)}{2}}$

$= (n+1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$ q.e.d.

Aufgabe 3:

Induktionsvoraussetzung: $n^7 - n$ ist durch 7 teilbar

Induktionsanfang: $n = 1$ $1^7 - 1 = 0 = 0 * 7$ ✓

Induktionsschluß: $n \to n + 1$ $(n + 1)^7 - (n + 1)$

$= n^7 + 7 n^6 + 21 n^5 + 35 n^4 + 35 n^3 + 21 n^2 + 7 n + 1 - n - 1$

$= (n^7 - n) + 7 * (n^6 + 3 n^5 + 5 n^4 + 5 n^3 + 3 n^2 + n)$

↓

nach Induktionsvoraussetzung durch 7 teilbar

	U N I V E R S I T Ä T **KOBLENZ · LANDAU**	Fachbereich 3: Naturwissenschaften M A T H E M A T I S C H E S I N S T I T U T **Dr. Ingrid Hupp**

2. Übungsblatt zu „Diskrete algebraische Strukturen“

Ausgabe: 8. 11. 2000
Abgabe: 15. 11. 2000

1. a) Schreiben Sie 1019 in den Basen 2, 3, 8 und 16
   b) Verwandeln Sie in das Dezimalsystem $(234)_6$, $(A0B)_{12}$, $(110010)_2$ und $(ABC)_{16}$
   c) Berechnen Sie ohne Umrechnung in das Dezimalsystem $(4772)_8 + (327)_8$ und $(5213)_6 \cdot (11)_6$

2. a) Bestimmen Sie die p-adische Entwicklung von $\frac{3}{8}$ im Dualsystem.
   b) Geben Sie die p-adische Entwicklung des Bruches $\left(\frac{1}{3}\right)_5$ an.

3. Auf der Menge der reellen Zahlen sei eine Verknüpfung $a \# b$ definiert durch $a \# b = a + b - 2a^2b^2$. Untersuchen Sie die Verknüpfung # auf Assoziativität, Kommutativität, Existenz eines neutralen Elementes und Existenz von inversen Elementen.

4. a) Schreiben Sie 1019 in den Basen 4, 5 und 12
   b) Verwandeln Sie in das Dezimalsystem $(2130)_4$, $(11001)_2$ und $(1AB)_{12}$
   c) Berechnen Sie ohne Umrechnung in das Dezimalsystem $(7635)_9 - (2146)_9$ und $(3530)_6 : (13)_6$

5. a) Bestimmen Sie die p-adische Entwicklung von $\frac{1}{10}$ im Stellenwertsystem zur Basis 14.
   b) Geben Sie die p-adische Entwicklung des Bruches $\left(\frac{1}{8}\right)_{12}$ an.

6. Auf der Menge der reellen Zahlen sei eine Verknüpfung $a \circ b$ definiert durch $a \circ b = a + b - 23$.
   Untersuchen Sie die Verknüpfung $\circ$ auf Assoziativität, Kommutativität, Existenz eines neutralen Elementes und Existenz von inversen Elementen.

Schriftlich zu bearbeiten und abzugeben sind die Aufgaben Nr. 1, 2 und 3.

„Diskrete algebraische Strukturen“
Lösung zum 2. Übungsblatt

Aufgabe 1:

a) $1019 = (1111111011)_2 = (1101202)_3 = (1773)_8 = (3FB)_{16}$

b) $(234)_6 = 94$ $\quad$ $(A0B)_{12} = 1451$

$(110010)_2 = 50$ $\quad$ $(ABC)_{16} = 2748$

c)
$$\begin{array}{r} (4772)_8 \\ \underline{+\ (327)_8} \\ (5321)_8 \end{array}$$

$$(5213)_6 * (11)_6 = \begin{array}{r} (52130)_6 \\ \underline{+\ (5213)_6} \\ (101343)_6 \end{array}$$

Aufgabe 2:

$$(11)_2 \div (1000)_2 = (0{,}011)_2$$
$$\begin{array}{r} 1100 \\ \underline{-\ 1000} \\ 1000 \\ \underline{-\ 1000} \\ 0 \end{array}$$

$$(1)_5 \div (3)_5 = 0{,}0\overline{13}$$
$$\begin{array}{r} 10 \\ \underline{-\ 3} \\ 20 \\ \underline{-\ 14} \\ 1 \end{array}$$

a)

$\frac{3}{8} * 2 = 0$ $\quad$ Rest $\frac{3}{4}$

$\frac{3}{4} * 2 = 1$ $\quad$ Rest ½

½ $* 2 = 1$

➦ $\frac{3}{8} = (0{,}011)_2$

b)

$\frac{1}{3} * 5 = 1$ $\quad$ Rest $\frac{2}{3}$

$\frac{2}{3} * 5 = 3$ $\quad$ Rest $\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3} * 5 = \ldots$

➦ $\frac{1}{3} = (0,\overline{13})$

Aufgabe 3:

nicht assoziativ

$1 \# (2 \# 3) = 1 \# (-67) = -9044$

$(1 \# 2) \# 3 = (-5) \# 3 = -452$

kommutativ

$a \# b = a + b - 2a^2 b^2 = b + a - 2b^2 a^2 = b \# a$

neutrales Element $0 \in \mathbb{R}$

$a \# 0 = a + 0 - 2 * a^2 * 0^2 = a$

$0 \# a = 0 + a - 2 * 0^2 * a^2 = a$

inverse Elemente

$a \# x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a + x - 2a^2 x^2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2a^2 x^2 - x - a = 0$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - \frac{x}{2a^2} - \frac{a}{2a^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - \frac{x}{2a^2} - \frac{1}{2a} = 0$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{1}{4a^2} \pm \sqrt{\frac{1}{16a^4} + \frac{1}{2a}}$$

$\Rightarrow D = 1 + 8a^3 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^3 > -{}^1/_8$

$\Leftrightarrow \quad a < -½$

a < - ½ kein inverses Element

a = - ½ inverses Element 1

a > - ½ zwei inverse Elemente $\frac{1}{4a^2}\left(1 \pm \sqrt{1 + 8a^3}\right)$

	U N I V E R S I T Ä T **KOBLENZ · LANDAU**	Fachbereich 3: Naturwissenschaften M A T H E M A T I S C H E S I N S T I T U T **Dr. Ingrid Hupp**

3. Übungsblatt zu „Diskrete algebraische Strukturen“

Ausgabe: 15. 11. 2000
Abgabe: 22. 11. 2000

1. Geben Sie zu F_3 (Körper mit drei Elementen) die Verknüpfungstafeln an und weisen Sie nach, daß es sich um einen Körper handelt.

2. Beweisen Sie für beliebige Mengen A und B:
$(A \subseteq C \text{ und } B \subseteq C) \Leftrightarrow (A \cup B \subseteq C)$

3. Geben Sie die Potenzmenge der Potenzmenge der einelementigen Menge {a} an.

4. Auf der Menge {0, 1, 2, 3} sind die Verknüpfungen + und * wie folgt definiert:

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

*	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Wird hierdurch ein Körper definiert? Beweisen Sie Ihre Aussage.

5. V_a sei die Vielfachenmenge einer Zahl a. Beweisen Sie $a \mid b \Rightarrow V_b \subseteq V_a$

6. Beweisen Sie das Distributivgesetz: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Schriftlich zu bearbeiten und abzugeben sind die Aufgaben Nr. 1, 2 und 3.

„Diskrete algebraische Strukturen“
Lösung zum 3. Übungsblatt

Aufgabe 1:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

*	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Assoziativität (AG, +)

a = 0 $\quad$ a + (b + c) = 0 + (b + c) = b + c
(a + b) + c = (0 + b) + c = b + c

b = 0 und c = 0 analog

a	b	c	b + c	a + (b + c)	(a + b)	(a + b) + c
1	1	1	2	0	2	0
1	1	2	0	1	2	1
1	2	1	0	1	0	1
2	1	1	2	1	0	1
1	2	2	1	2	0	2
2	1	2	0	2	0	2
2	2	1	0	2	1	2
2	2	2	1	0	1	0

Kommutativität (KG, +) *Tabelle ist achsensymmetrisch zur Hauptdiagonalen*

Neutrales Element (neutral, +) 0 zu sehen aus der Tabelle

Inverses Element (invers, +)

0 + 0 = 0
1 + 2 = 0
2 + 1 = 0

Assoziativität (AG, *)

$a = 0$ oder $b = 0$ oder $c = 0$ — $a * (b * c) = 0$, $(a * b) * c = 0$ *)

$a = 1$ — $1 * (b * c) = b * c$, $(1 * b) * c = b * c$

analog: $b = 1$ und $c = 1$

$a = b = c = 2$ — $2 * (2 * 2) = 2 * 1 = 2$, $(2 * 2) * 2 = 1 * 2 = 2$

Kommutativität (KG, *) *Symmetrie der Tabelle*

Neutrales Element (neutral, *) ***1*** zu sehen aus der Tabelle

Inverses Element (invers, *) $1 * 1 = 1$, $2 * 2 = 1$

Distributivität $a * (b + c) = a * b + a * c$

$a = 0$ — $0 * (b + c) = 0$, $0 * b + 0 * b = 0 + 0 = 0$ *)

$a = 1$ — $1 * (b + c) = b + c$, $1 * b + 1 * c = b + c$

$a = 2$

b	c	b + c	2 * (b + c)	2 b	2 c	2 b + 2 c
0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	2	0	2	2
0	2	2	1	0	1	1
1	0	1	2	2	0	2
1	1	2	1	2	2	1
1	2	0	0	2	1	0
2	0	2	1	1	0	1
2	1	0	0	1	2	0
2	2	1	2	1	1	2

*) nicht unbedingt notwendig

Aufgabe 2:

Behauptung 1: $(A \subseteq C$ und $B \subseteq C) \Rightarrow (A \cup B \subseteq C)$

Beweis: $(A \subseteq C$ und $B \subseteq C)$
$\Rightarrow ((x \in A \Rightarrow x \in C)$ und $(x \in B \Rightarrow x \in C))$
$\Rightarrow ((x \in A$ oder $x \in B) \Rightarrow x \in C)$
$\Rightarrow ((x \in A \cup B) \Rightarrow x \in C)$
$\Rightarrow (A \cup B \subseteq C)$

Behauptung 2: $(A \cup B \subseteq C) \Rightarrow (A \subseteq C$ und $B \subseteq C)$

Beweis: $(x \in A \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in C) \Rightarrow (A \subseteq C)$
$(x \in B \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in C) \Rightarrow (B \subseteq C)$

Aufgabe 3:

Menge:	$\{ a \}$
Potenzmenge:	$P(\{a\}) = \{ \emptyset, \{ a \}\}$
Potenzmenge der Potenzmengen:	$P(P(\{a\})) = \{ \emptyset, \{ \emptyset \}, \{\{ \alpha \}\}, \{ \emptyset, \{ \alpha \}\}\}$

	U N I V E R S I T Ä T **KOBLENZ · LANDAU**	Fachbereich 3: Naturwissenschaften M A T H E M A T I S C H E S I N S T I T U T **Dr. Ingrid Hupp**

4. Übungsblatt zu „Diskrete algebraische Strukturen“

Ausgabe: 22.11.2000
Abgabe: 29.11.2000

1. Auf der Menge V = { 0, 1} sind die folgenden Verknüpfungen definiert

$0 \sqcup 0 = 0$		$0 \sqcap 0 = 0$		$\overline{0} = 1$
$0 \sqcup 1 = 1$		$0 \sqcap 1 = 0$		$\overline{1} = 0$
$1 \sqcup 0 = 1$		$1 \sqcap 0 = 0$		
$1 \sqcup 1 = 1$		$1 \sqcap 1 = 1$		

Beweisen Sie, daß $(V, \sqcup, \sqcap)$ eine Boolesche Algebra ist.

2. Beweisen oder widerlegen Sie:
   a) $A \times B \times C = A \times (B \times C) = (A \times B) \times C \;\Rightarrow\; A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$ oder $C = \emptyset$
   b) $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$ oder $C = \emptyset \;\Rightarrow\; A \times B \times C = A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$

3. Gegeben sei die Grundmenge $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
   Ordnen Sie den Mengen $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{3, 4\}$ ihre charakteristische Sequenz zu. Bilden Sie dann $A \cup B$ und $A \cap B$ und ordnen Sie den entstehenden Mengen wieder ihre charakteristischen Sequenzen zu. Wie hätte man die entstehenden Sequenzen berechnen können ohne zuvor Mengenvereinigung und Durchschnittsbildung auszuführen? Verallgemeinern Sie Ihre Beobachtung.

4. Weisen Sie nach, daß für die symmetrische Differenz $A \Delta B$ gilt
   $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

5. Beweisen oder widerlegen Sie
   a) $A \times B = B \times A \;\Rightarrow\; A = B$ oder $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$
   b) $A = B$ oder $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset \;\Rightarrow\; A \times B = B \times A$

6. Gegeben sei die Grundmenge $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$.
   Ordnen Sie den Mengen $A = \{1, 2\}$ und $B = \{2, 3\}$ ihre charakteristische Sequenz zu. Bilden Sie dann $A \Delta B$ und ordnen Sie der entstehenden Menge wieder ihre charakteristischen Sequenzen zu. Was kann man beobachten?

Schriftlich zu bearbeiten und abzugeben sind die Aufgaben Nr. 1, 2 und 3.

„Diskrete algebraische Strukturen“
Lösung zum 4. Übungsblatt

Aufgabe 1:

$\overline{0} = 1 \qquad \overline{1} = 0$

$\sqcup$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\sqcap$	0	1
0	0	0
1	0	1

Kommutativität (KG, $\sqcup$) *Tabelle*

Kommutativität (KG, $\sqcap$) *Tabelle*

Assoziativität (AG, $\sqcap$)

a	b	c	$a \sqcap b$	$(a \sqcap b) \sqcap c$	$b \sqcap c$	$a \sqcap (b \sqcap c)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

Assoziativität (AG, $\sqcup$)

a	b	c	$a \sqcup b$	$(a \sqcup b) \sqcup c$	$b \sqcup c$	$a \sqcup (b \sqcup c)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Absorption

a	b	$a \sqcup b$	$a \sqcap (a \sqcup b)$	$a \sqcap c$	$a \sqcup (a \sqcap b)$
0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1

Distributivität

I $\quad a \sqcap (b \sqcup c) = (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c)$

$a = 0 \qquad 0 \sqcap (b \sqcup c) = 0$

$\qquad\qquad (0 \sqcap b) \sqcup (0 \sqcap c) = 0 \sqcup 0 = 0$

$a = 1 \qquad 1 \sqcap (b \sqcup c) = b \sqcup c$

$\qquad\qquad (1 \sqcap b) \sqcup (1 \sqcap c) = b \sqcup c$

II $\quad a \sqcup (b \sqcap c) = (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c)$

$a = 0 \qquad 0 \sqcup (b \sqcap c) = b \sqcap c$

$\qquad\qquad (0 \sqcup b) \sqcap (0 \sqcup c) = b \sqcap c$

$a = 1 \qquad 1 \sqcup (b \sqcap c) = 1$

$\qquad\qquad (1 \sqcup b) \sqcap (1 \sqcup c) = 1 \sqcap 1 = 1$

Neutrales Element

(Neutral, $\sqcup$ ***)*** $\quad 0 \qquad 1 \sqcup 0 = 1$

$\qquad\qquad\qquad 0 \sqcup 0 = 0$

(Neutral, $\sqcap$ ***)*** $\quad 1 \qquad 1 \sqcap 1 = 1$

$\qquad\qquad\qquad 0 \sqcap 1 = 0$

(Komplementäre Elemente)

$1 \sqcup \bar{1} = 1 \sqcup 0 = 1 \qquad 0 \sqcup \bar{0} = 0 \sqcup 1 = 1$

$1 \sqcap \bar{1} = 1 \sqcap 0 = 0 \qquad 0 \sqcap \bar{0} = 0 \sqcap 1 = 0$

Aufgabe 2a:

Annahme: $A \neq \emptyset$ und $B \neq \emptyset$ und $C \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ es existiert $a \in A$, $b \in B$ und $c \in C$

$\Rightarrow$ $(a, b, c) \in A \times B \times C$ und
$(a, (b, c)) \in A \times (B \times C)$ und
$((a, b), c) \in (A \times B) \times C$

$\Rightarrow$ $A \times B \times C \neq A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C \neq A \times B \times C$
Somit ist die Behauptung wahr.

Aufgabe 2b:

Sei o.B.d.A. $A = \emptyset$

$A \times B \times C = \emptyset$ nach Definition

$(A \times B) \times C = \emptyset \times C = \emptyset$ nach Definition

$A \times (B \times C) = \emptyset \times (B \times C) = \emptyset$ nach Definition

Somit ist die Behauptung wahr.

Aufgabe 3:

$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5\}$

$A = \{1; 2; 3\}$	$\rightarrow$	$(1; 1; 1; 0; 0)$
$B = \{3; 4\}$	$\rightarrow$	$(0; 0; 1; 1; 0)$
$A \cap B = \{3\}$	$\rightarrow$	$(0; 0; 1; 0; 0)$
$A \cup B = \{1; 2; 3; 4\}$	$\rightarrow$	$(1; 1; 1; 1; 0)$

Schnitt $\cong \sqcap$

Vereinigung $\cong \sqcup$

Die charakteristische Sequenz von $A \cap B$ erhält man durch komponentenweise Verknüpfung der charakteristischen Sequenzen von A und B mittels der $\sqcap$ - Verknüpfung.

Die charakteristische Sequenz von $A \cup B$ erhält man durch komponentenweise Verknüpfung der charakteristischen Sequenzen von A und B mittels der $\sqcup$ - Verknüpfung.

5. Übungsblatt zu „Diskrete algebraische Strukturen“

Ausgabe: 29.11.2000
Abgabe: 6.12.2000

1. Untersuchen Sie die folgenden Relationen hinsichtlich Reflexivität, Irreflexivität, Symmetrie, Antisymmetrie und Transitivität:
   $R_1 = \{(x,y) \in \mathbf{N}x\mathbf{N} \mid x + y \text{ ist ungerade}\}$
   $R_2 = \{(x,y) \in \mathbf{N}x\mathbf{N} \mid y^2 = x\}$
   $R_3 = \{(x,y) \in \mathbf{N}x\mathbf{N} \mid x \text{ ist gerade und } y \text{ ist ungerade}\}$

2. Weisen Sie nach, daß es sich bei den folgenden Beispielen um Äquivalenzrelationen handelt.
   Gibt es endlich oder unendlich viele Äquivalenzklassen?
   Wieviele Elemente haben die einzelnen Äquivalenzklassen?
   $R_4 = \{(x,y) \in \mathbf{R} \text{ x } \mathbf{R} \mid xy > 0 \text{ oder } x = y\}$
   $R_5 = \{(x,y) \in \mathbf{N} \text{ x } \mathbf{N} \mid y^2 - y = x^2 - x\}$

3. R ist eine Relation. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen:
   a) R Halbordnung $\Rightarrow$ R keine Äquivalenzrelation
   b) Es gibt Relationen, die zugleich symmetrisch, antisymmetrisch und nicht reflexiv sind.

4. Untersuchen Sie die folgende Relation hinsichtlich Reflexivität, Irreflexivität, Symmetrie, Antisymmetrie und Transitivität:
   $R_6 = \{(x,y) \in \mathbf{R}x\mathbf{R} : \ |x-y| \leq \min(|x|,|y|)\}$

5. Bestimmen Sie die Äquivalenzklassen der untenstehenden Äquivalenzrelation. Gibt es endlich oder unendlich viele Äquivalenzklassen? Wieviele Elemente haben die einzelnen Äquivalenzklassen?
   $R_7 = \{(x,y) \in \mathbf{R}\backslash\{\mathbf{0}\}x\mathbf{R}\backslash\{\mathbf{0}\} \mid (x^2 - 1)(y^2 - 1) > 0 \text{ oder } |x| = |y|\}$

6. Nennen Sie für jeden der drei möglichen Fälle eine nichtleere Relation in einer Menge A, die zwei der Eigenschaften

   reflexiv, symmetrisch, transitiv

   hat und die dritte Eigenschaft nicht. Der Nachweis der Eigenschaften ist nicht notwendig.

Schriftlich zu bearbeiten und abzugeben sind die Aufgaben Nr. 1, 2 und 3.

„Diskrete algebraische Strukturen“
Lösung zum 5. Übungsblatt

Aufgabe 1:

$R_1 = \{ (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + y$ ist ungerade$\}$

nicht reflexiv: $1 + 1 = 2$ gerade $\Rightarrow$ $(1; 1) \notin R_1$

symmetrisch: $(x, y) \in R_1 \Rightarrow x + y$ ungerade $\Rightarrow y + x$ ungerade $\Rightarrow (y, x) \in R_1$

nicht antisymmetrisch: $(1; 2) \in R_1$ und $(2; 1) \in R_1$ aber $1 \neq 2$

nicht transitiv: $(1; 2) \in R_1$ und $(2; 3) \in R_1$ aber $(1; 3) \notin R_1$

$R_2 = \{ (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y^2 = x\}$

nicht reflexiv: $(2; 2) \notin R_2$

nicht symmetrisch: $(4; 2) \in R_2$ aber $(2; 4) \notin R_2$

antisymmetrisch: $(x; y) \in R_2$ und $(y; x) \in R_2 \Rightarrow y^2 = x$ und $x^2 = y \Rightarrow x = y^2 = x^4$
$x = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = y$

nicht transitiv: $(16; 4) \in R_2$ und $(4; 2) \in R_2$ aber $(16; 2) \notin R_2$

$R_3 = \{ (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x$ ist gerade und y ist ungerade$\}$

nicht reflexiv: $(1; 1) \notin R_3$

nicht symmetrisch: $(2; 3) \in R_3$ aber $(3; 2) \notin R_3$

antisymmetrisch: $(x; y) \in R_3 \Rightarrow (y; x) \notin R_3$
es existieren keine $x, y \in \mathbb{N}$.. mit $(x, y) \in R_3$ und $(y, x) \in R_3$

transitiv: Wären $(x; y) \in R_3$ und $(y; z) \in R_3$, so müßte y zugleich ungerade und gerade sein. Da dies nicht möglich ist, existieren keine $x, y, z \in \mathbb{N}$ mit $(x, y) \in R_3$ und $(y, z) \in R_3$

Aufgabe 2:

$R_4 = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid xy > 0 \text{ oder } x = y\}$

reflexiv: $(x; x) \in R_4 \quad \forall x$

symmetrisch: $(x, y) \in R_4 \Rightarrow xy > 0$ oder $x = y \Rightarrow yx > 0$ oder $y = x \Rightarrow (y, x) \in R_4$

transitiv: $(x; y) \in R_4$ und $(y; z) \in R_4 \Rightarrow (xy > 0$ oder $x = y)$ und $(yz > 0$ oder $y = z) \Rightarrow$ $(xy > 0$ und $yz > 0)$ oder $(xy > 0$ und $y = z)$ oder $(x = y$ und $yz > 0)$ oder $(x = y$ und $y = z)$

$xz > 0$ oder $x = z \Rightarrow (x, z) \in R_4$

Äquivalenzklassen: $\mathbb{R}^+$ hat unendlich viele Elemente

$\mathbb{R}^-$ hat unendlich viele Elemente

$\{ 0 \}$ hat ein Element

$R_5 = \{ (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y^2 - y = x^2 - x\}$

Vorüberlegungen: $y^2 - y = x^2 - x \Rightarrow y^2 - x^2 = y - x \Rightarrow (y - x)(y + x) = 1 * (y - x)$
$\Rightarrow x = y$ oder $y + x = 1 \Rightarrow x = y$
denn in $\mathbb{N}$ gilt $x + y \geq 2 \;\; \forall x, y \in \mathbb{N}$

reflexiv: $x = x \;\; \forall x \in \mathbb{N} \Rightarrow (x; x) \in R_5 \;\; \forall x \in \mathbb{N}$

symmetrisch: $(x, y) \in R_5 \Rightarrow x = y \Rightarrow y = x \Rightarrow (y, x) \in R_5$

transitiv: $(x; y) \in R_5$ und $(y; z) \in R_5 \Rightarrow x = y$ und $y = z \Rightarrow x = z \Rightarrow (x, z) \in R_5$

Äquivalenzklassen: es gibt unendlich viele einelementige Äquivalenzklassen

Aufgabe 3a:

Hinweis: R Halbordnung $\Leftrightarrow$ R Ordnungsrelation

Gegenbeispiel: Die Gleichheitsrelation ist sowohl eine Halbordnung als auch eine Äquiva-enzrelation.

Aufgabe 3b:

Beispiel: $M = \{a, b\}$ $\quad R = \{(a, a)\}$

	U N I V E R S I T Ä T **KOBLENZ · LANDAU**	Fachbereich 3: Naturwissenschaften M A T H E M A T I S C H E S I N S T I T U T **Dr. Ingrid Hupp**

6. Übungsblatt zu „Diskrete algebraische Strukturen“

Ausgabe: 6.12.2000
Abgabe: 13.12.2000

1. R und S seien Äquivalenzrelationen auf einer gemeinsamen Grundmenge M. Sind
   a) $R \cap S$
   b) $R \cup S$
   c) $R \setminus S$
   d) $R \circ S$

   wieder Äquivalenzrelationen?

2. Untersuchen Sie die Funktionen f: **N**→**N** hinsichtlich Injektivität und Surjektivität
   a) $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(-1)^{x+1}$
   b) $f(x) = |x - 3| + 4$
   c) $f(x) = x + (-1)^{x+1}$

3. Die Funktionen f, g von **N** in **N** sind definiert durch

   $f(x) = 10x \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \text{ ist eine Primzahl} \\ x & \text{für } x \text{ ist keine Primzahl} \end{cases}$

   Beweisen oder widerlegen Sie
   a) $g \circ f \circ g \circ g = f \circ g$
   b) $g \circ g \circ g \circ g \circ f \circ g \circ g \circ f = f \circ f$

4. R sei eine Äquivalenzrelation auf einer Grundmenge M. Sind die Komplementärrelation von R und die Umkehrrelation von R wieder Äquivalenzrelationen?

5. Untersuchen Sie die Funktionen f: **R**→**R** hinsichtlich Injektivität und Surjektivität
   a) $f(x) = ax + b$
   b) $f(x) = x(x + 1)$

6. Es seien f, g: $P(\mathbf{Z}) \to P(\mathbf{Z})$ Funktionen mit $f(A) = A \cap \mathbf{N}$ und $g(A) = \overline{A}$ für alle $A \subseteq P(\mathbf{Z})$. $P(\mathbf{Z})$ bedeutet hierbei die Potenzmenge der ganzen Zahlen.
   Bestimmen Sie g o f und f o g und für $A = \{x \in \mathbf{Z} \mid -20 \le x \le 20\}$ jeweils die Funktionswerte.

Schriftlich zu bearbeiten und abzugeben sind die Aufgaben Nr. 1, 2 und 3.

„Diskrete algebraische Strukturen“
Lösung zum 6. Übungsblatt

Aufgabe 1:

Behauptung 1: $R \cap S$ ist wieder Äquivalenzrelation.

Beweis: $x \in M \Rightarrow (x, x) \in R$ und $(x, x) \in S \Rightarrow (x, x) \in R \cap S$

Symmetrie
Sei $(x, y) \in R \cap S \Rightarrow (x, y) \in R$ und $(x, y) \in S \Rightarrow (y, x) \in R$ und $(y, x) \in S \Rightarrow (y, x) \in R \cap S$

Transitivität
Seien $(x, y) \in R \cap S$ und $(y, z) \in R \cap S \Rightarrow (x, y) \in R$ und $(x, y) \in S$ q und $(y, z) \in R$ und $(y, z) \in S \Rightarrow (x, z) \in R$ und $(x, z) \in S \Rightarrow (x, z) \in R \cap S$

Behauptung 2: $R \cup S$ ist keine Äquivalenzrelation

Beweis: Gegenbeispiel: $M = \{a, b, c\}$
$R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\}$
$S = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (c, a)\}$

in $R \cup S$ sind (b, a) und (a, c) enthalten, nicht aber (b, c) ↯ zur Transitivität

Behauptung 3: $R \setminus S$ ist keine Äquivalenzrelation

Beweis: R und S wie in Beweis 2
$(a, a) \notin R \setminus S$ ↯ zur Reflexivität

Behauptung 4: $R \circ S$ ist keine Äquivalenzrelation

Beweis: R und S wie in Beweis 2
$(c, b) \in R \circ S$ wegen $a \in M$ mit $(c, a) \in S$ und $(a, b) \in R$
aber $(b, c) \notin R \circ S$ ↯ zur Symmetrie

Aufgabe 2a:

$f(x) \;=\; \frac{x}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}(-1)^{x+1}$

x = gerade: $f(x) \;=\; \frac{x}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4} \;=\; \frac{x}{2}$

x ungerade: $f(x) \;=\; \frac{x}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} \;=\; \frac{x+1}{2}$

nicht injektiv: f(1) = f(2) = 1

surjektiv: zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ist 2 n Urbild

Aufgabe 2b:

nicht injektiv: f(2) = f(4) = 5

nicht surjektiv: $f(x) \geq 4 \quad \Rightarrow$ 1, 2 und 3 haben kein Urbild

Aufgabe 2c:

x gerade f(x) = x – 1

x ungerade f(x) = x + 1

f(x) ist injektiv:

x	1	2	3	4	5	6 ...
f(x)	2	1	4	3	6	5 ...

f(x) ist surjektiv: zu $a \in 2\mathbb{N}$ ist a – 1 Urbild

zu $a \in \mathbb{N} \setminus 2\mathbb{N}$ ist a + 1 Urbild

Aufgabe 3:

$(g \circ g)(x) \;=\; g(g(x)) \;=\; \begin{cases} g(1) \;=\; 1 & \text{für } x \in \mathbb{R} \\ g(x) \;=\; x & \text{für } x \notin \mathbb{R} \end{cases} \quad \Rightarrow g \circ g \;=\; g$

$(g \circ f)(x) \;=\; g(f(x)) \;=\; g(10x) \;=\; 10x \;\Rightarrow\; g \circ f \;=\; f$

a) $g \circ f \circ g \circ g \;=\; (g \circ f) \circ (g \circ g) \;=\; f \circ g$

b) $g \circ g \circ g \circ f \circ g \circ g \;=\; (g \circ g) \circ (g \circ f) \circ (g \circ f) \;=\; g \circ f \circ f \;=\; (g \circ f) \circ f \;=\; f \circ f$

	U N I V E R S I T Ä T **KOBLENZ · LANDAU**	Fachbereich 3: Naturwissenschaften M A T H E M A T I S C H E S I N S T I T U T **Dr. Ingrid Hupp**

7. Übungsblatt zu „Diskrete algebraische Strukturen“

Ausgabe: 13.12.2000
Abgabe: 3.1.2001

1. Auf der Potenzmenge G einer willkürlichen vorgegebenen Menge M sei die Verknüpfung Δ definiert durch $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ für $A, B \in G$. Zeigen Sie, daß (G, Δ) eine kommutative Gruppe ist.

2. Stellen Sie die Gruppentafel für C_2 x C_2, C_2 x C_3 und C_2 x D auf. C_2 und C_3 sind hierbei die additiven Gruppen der Körper F_2 und F_3, D ist die multiplikative Gruppe des Körpers F_3.

3. Beweisen Sie: besitzt eine Halbgruppe (H, o) mehr als ein idempotentes Element, so ist sie keine Gruppe.
   Hinweis: Ein Element $x \in H$ heißt idempotent, wenn gilt $x \circ x = x$.

4. Beweisen Sie: Für jedes $k \in \mathbf{Z}$ ist $(\mathbf{Z}, \tau)$ mit $a \tau b = a + b - k$ eine kommutative Gruppe.

5. Es seinen $(G_1, \cdot), \ldots, (G_n, \cdot)$ Gruppen. In der Produktmenge $G = G_1 \times \ldots \times G_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in G_i \text{ für } 1 \le i \le n\}$ ist eine Multiplikation definiert durch $(a_1, \ldots, a_n)(b_1, \ldots, b_n) := (a_1b_1, \ldots, a_nb_n)$.
   Weisen Sie nach, daß $G = G_1 \times \ldots \times G_n$ mit der angegebenen Multiplikation eine Gruppe bildet. Diese Gruppe heißt das direkte Produkt der Gruppen $(G_1, \cdot), \ldots, (G_n, \cdot)$.

6. In einer Halbgruppe (H, o) müssen die beiden Gleichungen $a \circ x = b$ und $x \circ b = a$ nicht für alle a und b aus H lösbar sein.
   a) Geben Sie ein Beispiel für eine Halbgruppe an, in der beide Gleichungen nicht für alle a und b lösbar sind.
   b) Geben Sie ein Beispiel für eine Halbgruppe an, in der genau eine Gleichung nicht für alle a und b lösbar ist, die zweite Gleichung aber stets eine Lösung hat.

Schriftlich zu bearbeiten und abzugeben sind die Aufgaben Nr. 1, 2 und 3.

„Diskrete algebraische Strukturen“
Lösung zum 7. Übungsblatt

Aufgabe 1:

- $P(M) \neq \emptyset$ für alle Mengen M, denn es gilt stets $\emptyset \in P(M)$
- Δ ist Verknüpfung auf P(M)
- Δ ist assoziativ

A	B	C	$A \Delta B$	$(A \Delta B) \Delta C$	$B \Delta C$	$A \Delta (B \Delta C)$
$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$
$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$

$\Rightarrow$ Halbgruppe

- Δ hat das neutrale Element $\emptyset$

  $A \Delta \emptyset \;=\; (A \cup \emptyset) \setminus (A \cap \emptyset) \;=\; A \setminus \emptyset \;=\; A$

  $\emptyset \Delta A \;=\; (\emptyset \cup A) \setminus (\emptyset \cap A) \;=\; A \setminus \emptyset \;=\; A$

  $\Rightarrow$ Monoid

- es gilt $A^{-1} \;=\; A$ für alle $A \in G$

  $A \Delta A^{-1} \;=\; A^{-1} \Delta A \;=\; (A \cup A) \setminus (A \cap A) \;=\; A \setminus A \;=\; \emptyset$

  $\Rightarrow$ Gruppe

- Δ ist kommutativ

  $A \Delta B \;=\; (A \cup B) \setminus (A \cap B) \;=\; (B \cup A) \setminus (A \cap B) \;=\; B \Delta A \quad \forall\, A, B \in G$

  $\Rightarrow$ (G, Δ) ist kommutative Gruppe

Aufgabe 2:

C_2

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

C_3

$\oplus$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

D

$\odot$	1	2
1	1	2
2	2	1

$C_2 \times C_2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$

	(0, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(1, 1)
(0, 0)	(0, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(1, 1)
(0, 1)	(0, 1)	(0, 0)	(1, 1)	(1, 0)
(1, 0)	(1, 0)	(1, 1)	(0, 0)	(0, 1)
(1, 1)	(1, 1)	(1, 0)	(0, 1)	(0, 0)

$C_2 \times C_3 = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2)\}$

	(0, 0)	(0, 1)	(0, 2)	(1, 0)	(1, 1)	(1, 2)
(0, 0)	(0, 0)	(0, 1)	(0, 2)	(1, 0)	(1, 1)	(1, 2)
(0, 1)	(0, 1)	(0, 2)	(0, 0)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 0)
(0, 2)	(0, 2)	(0, 0)	(0, 1)	(1, 2)	(1, 0)	(1, 1)
(1, 0)	(1, 0)	(1, 1)	(1, 2)	(0, 0)	(0, 1)	(0, 2)
(1, 1)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 0)	(0, 1)	(0, 2)	(0, 0)
(1, 2)	(1, 2)	(1, 0)	(1, 1)	(0, 2)	(0, 0)	(0, 1)

$C_2 \times D = \{(0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2)\}$

	(0, 1)	(1, 2)	(1, 1)	(1, 2)
(0, 1)	(0, 1)	(0, 2)	(1, 1)	(1, 2)
(1, 2)	(0, 2)	(0, 1)	(1, 2)	(1, 1)
(1, 1)	(1, 1)	(1, 2)	(0, 1)	(0, 2)
(1, 2)	(1, 2)	(1, 1)	(0, 2)	(0, 1)

Aufgabe 3:

Sei G eine Gruppe mit neutralem Element e. Sei $x \in G$ mit $x \, o \, x = x$.

$x \overset{(G2)}{=} e \, o \, x \overset{(G3)}{=} (x^{-1} \, o \, x) \, o \, x \overset{(G1)}{=} x^{-1} \, o \, (x \, o \, x) = x^{-1} \, o \, x = e$

$\Rightarrow$ eine Gruppe hat höchstens ein idempotentes Element.

Bemerkung:

Wegen $e \, o \, e = e$ gilt sogar der Satz: „Eine Gruppe hat genau ein idempotentes Element.“

	U N I V E R S I T Ä T **KOBLENZ · LANDAU**	Fachbereich 3: Naturwissenschaften M A T H E M A T I S C H E S I N S T I T U T **Dr. Ingrid Hupp**

8. Übungsblatt zu „Diskrete algebraische Strukturen“

Ausgabe: 3.1.2001
Abgabe: 10.1.2001

1. a) Berechnen Sie $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ u. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}^{2000}$

   b) Berechnen Sie die inversen Elemente zu beiden Ergebnissen.

   c) Führen Sie die Rechnungen aus a) und b) in der Zykelschreibweise durch.

2. Bestimmen Sie in S_4 jeweils alle Untergruppen der Ordnung 3, 6 und 12.

3. Es gilt der Satz "Mit jeder Untergruppe U einer Gruppe G und jedem $g \in G$ ist auch gUg^{-1} eine Untergruppe von G. Überprüfen Sie diese Aussage an folgenden Beispielen:

   a) $G = S_4$, $U = V_4$, $g = (1\ \ 2\ \ 3)$

   b) $G = S_4$, $U = \{id, (1\ \ 2\ \ 3), (1\ \ 3\ \ 2)\}$, $g = (1\ \ 4)$

4. a) Berechnen Sie $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{10}$.

   b) Berechnen Sie die inversen Elementen zu beiden Ergebnissen.

   c) Führen Sie die Rechnungen aus a) und b) in der Zykelschreibweise durch.

5. Sei $G = \{0, 1, ..., 11\}$ und τ dieVerknüpfung $a\ \tau\ b = a + b \bmod(12)$. Dann ist (G, τ) eine Gruppe. Bestimmen Sie alle Untergruppen.

6. Seien die folgenden Permutationen Elemente der S_n. Begründen Sie:

   a) $(a_1, ..., a_r) = (a_1, ..., a_k)(a_k, \dots, a_r)$ für $2 \leq k \leq r\text{-}1$

   b) $(a_1, \dots, a_r) = (a_1, a_2)(a_2, a_3) \dots (a_{r-1}, a_r)$

   c) $(a_1, \dots, a_r)^{-1} = (a_r, \dots, a_1)$

Schriftlich zu bearbeiten und abzugeben sind die Aufgaben Nr. 1, 2 und 3.

„Diskrete algebraische Strukturen“
Lösung zum 8. Übungsblatt

Aufgabe 1 a)

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&6&1&2&5&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&4&5&2&6&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&5&6&4&3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix} = id$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}^{2000} = \left(\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}^3\right)^{666} * \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}^2$$

$$= \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}$$

Aufgabe 1 b)

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&5&6&4&3\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&6&5&3&4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}$$

Aufgabe 1 c)

$(1\ \ 3)\,(2\ \ 6\ \ 4)\,(1\ \ 3\ \ 5\ \ 6)\,(2\ \ 4) = (1)\,(2)\,(3\ \ 5\ \ 4\ \ 6) = (3\ \ 5\ \ 4\ \ 6)$

$(1\ \ 4\ \ 2)^{2000} = ((1\ \ 4\ \ 2)^3)^{666} * (1\ \ 4\ \ 2)^2 = \mathrm{id}^{666} * (1\ \ 2\ \ 4) = (1\ \ 2\ \ 4)$

$(3\ \ 5\ \ 4\ \ 6)^{-1} = (6\ \ 4\ \ 5\ \ 3) = (3\ \ 6\ \ 4\ \ 5)$

$(1\ \ 2\ \ 4)^{-1} = (4\ \ 2\ \ 1) = (1\ \ 4\ \ 2)$

Aufgabe 2)

Untergruppen der Ordnung 3

$U_1 = \{id, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$
$U_2 = \{id, (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 2)\}$
$U_3 = \{id, (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 3)\}$
$U_1 = \{id, (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3)\}$

Untergruppen der Ordnung 6

$U_5 = S_3 = \{id, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$
$U_6 = \{id, (1\ 2), (1\ 4), (2\ 4), (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 2)\}$
$U_7 = \{id, (1\ 3), (1\ 4), (3\ 4), (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 3)\}$
$U_8 = \{id, (2\ 3), (2\ 4), (3\ 4), (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3)\}$

Untergruppe der Ordnung 12

$U_9 = A_4 = \{id, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 2), (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 3), (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3)\}$

Aufgabe 3 a)

$V_4 = \{id, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$
$(1\ 2\ 3)\quad id \quad (1\ 3\ 2) = id$
$(1\ 2\ 3)\ (1\ 2)(3\ 4)\ (1\ 3\ 2) = (1\ 4)(2\ 3)$
$(1\ 2\ 3)\ (1\ 3)(2\ 4)\ (1\ 3\ 2) = (1\ 2)(3\ 4)$
$(1\ 2\ 3)\ (1\ 4)(2\ 3)\ (1\ 3\ 2) = (1\ 3)(2\ 4)$

$g\, V_4\, g^{-1} = \{id, (1\ 4)(2\ 3), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4)\} = V_4$

Aufgabe 3 b)

$U = \{id, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$

$(1\ 4)\quad id \quad (1\ 4) = id$
$(1\ 4)\ (1\ 2\ 3)\ (1\ 4) = (2\ 3\ 4)$
$(1\ 4)\ (1\ 3\ 2)\ (1\ 4) = (2\ 4\ 3)$

$g\, U\, g^{-1} = \{id, (2\ 3\ 4)(2\ 4\ 3)\}$

	UNIVERSITÄT KOBLENZ · LANDAU	Fachbereich 3: Naturwissenschaften MATHEMATISCHES INSTITUT **Dr. Ingrid Hupp**

9. Übungsblatt zu „Diskrete algebraische Strukturen“

Ausgabe: 10.1.2001
Abgabe: 17.1.2001

1. Sei G eine kommutative Gruppe der Ordnung 2n + 1. Berechnen Sie das Produkt aller Elemente von G.

2. C_3 sei die additiven Gruppe des Körpers F_3, G sei die von der Permutation (123) erzeugte zyklische Gruppe und f :
$C_3 \to G$ sei eine Funktion mit f(0) = (1), f(1) = (132) und f(2) = (123).
Zeigen Sie, daß für alle x, y $\in C_3$ gilt $f(x + y) = f(x)\, f(y)$.

3. Stellen Sie die Gruppentafel der Diedergruppe D_4 auf. Verwenden Sie dabei die in den Übungsstunden eingeführten Bezeichnungen (Sa und Sb: Spiegelung an den Diagonalen, Sc und Sd: Spiegelung an den Seitenhalbierenden).

4. Für jedes $k \in \mathbf{Z}$ ist $(\mathbf{Z}, *)$ mit $a * b = a + b - k$ eine zyklische Gruppe. Beweisen Sie, daß k + 1 ein erzeugendes Element ist.

5. H = {(1), (12)} ist eine Untergruppe der S_3. Zeigen Sie, daß die Rechtsnebenklassen von S_3 nach H von den Linksnebenklassen von S_3 nach H verschieden sind.

6. Eine Diedergruppe D_n ist die Gruppen der Deckabbildungen eines regulären n-Ecks.
Geben Sie für die Diedergruppen D_n für n = 3, 4, 5, 6 und 7 jeweils an, wie viele Elemente welcher Ordnung die jeweilige Diedergruppe enthält.

Schriftlich zu bearbeiten und abzugeben sind die Aufgaben Nr. 1, 2 und 3.

„Diskrete algebraische Strukturen“
Lösung zum 9. Übungsblatt

Aufgabe 1

Behauptung: In G gilt $a^{-1} \neq a \quad \forall\, a \in G \setminus \{e\}$

Beweis: Annahme: es existiert $a \in G$ mit $a^{-1} = a$

$\Rightarrow a^2 = e \qquad \Rightarrow \mathrm{Ord}(a) = 2$

$\Rightarrow$ 2 ist Teiler der Gruppenordnung

$\Rightarrow 2 \,/\, 2n + 1$ ↯

Da G Gruppe ist, existiert zu jedem Element a das inverse Element. Da G kommutativ ist, kann man das Produkt aller Elemente umordnen zu $e * a_1 * a_1^{-1} * a_2 * a_2^{-1} * \ldots * a_n * a_n^{-1} = e$
Das Produkt aller Elemente ist also gerade das neutrale Element der Gruppe.

Aufgabe 2

$f(0 + 0) = f(0) = (\,1\,) = (\,1\,)\,(\,1\,) = f(0)\, f(0)$

$f(0 + 1) = f(1) = (\,1\,3\,2\,) = (\,1\,)\,(\,1\,3\,2\,) = f(0)\, f(1)$

$f(0 + 2) = f(2) = (\,1\,2\,3\,) = (\,1\,)\,(\,1\,2\,3\,) = f(0)\, f(2)$

$f(1 + 0) = f(1) = (\,1\,3\,2\,) = (\,1\,3\,2\,)\,(\,1\,) = f(1)\, f(0)$

$f(1 + 1) = f(2) = (\,1\,2\,3\,) = (\,1\,3\,2\,)\,(\,1\,3\,2\,) = f(1)\, f(1)$

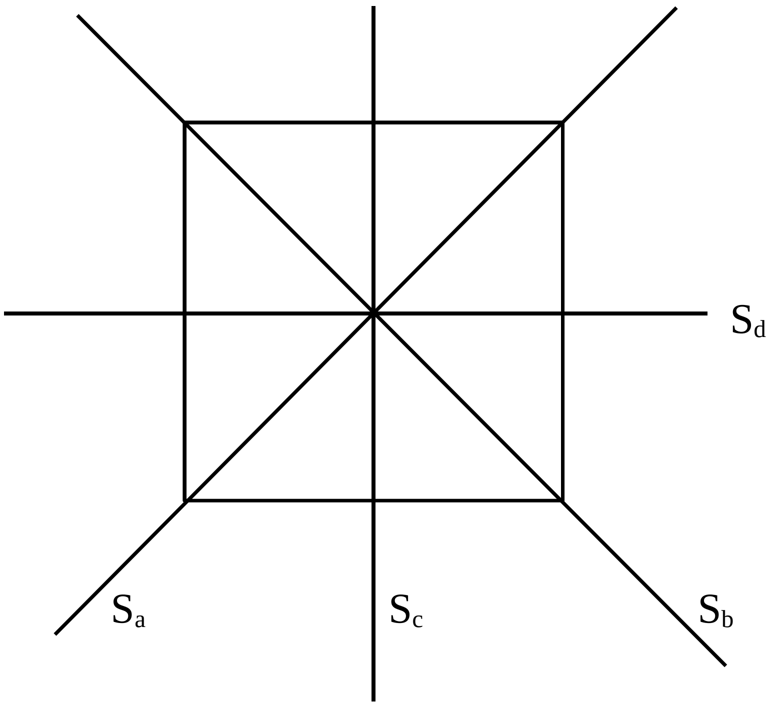
$f(1 + 2) = f(0) = (\,1\,) = (\,1\,3\,2\,)\,(\,1\,2\,3\,) = f(1)\, f(2)$

$f(2 + 0) = f(2) = (\,1\,2\,3\,) = (\,1\,2\,3\,)\,(\,1\,) = f(2)\, f(1)$

$f(2 + 1) = f(0) = (\,1\,) = (\,1\,2\,3\,)\,(\,1\,3\,2\,) = f(2)\, f(1)$

$f(2 + 2) = f(1) = (\,1\,3\,2\,) = (\,1\,2\,3\,)\,(\,1\,2\,3\,) = f(2)\, f(2)$

Aufgabe 3



	id	d_{90}	d_{180}	d_{270}	S_a	S_b	S_c	S_d
id	id	d_{90}	d_{180}	d_{270}	S_a	S_b	S_c	S_d
d_{90}	d_{90}	d_{180}	d_{270}	id	S_c	S_d	S_b	S_a
d_{180}	d_{180}	d_{270}	id	d_{90}	S_b	S_a	S_d	S_c
d_{270}	d_{270}	id	d_{90}	d_{180}	S_d	S_c	S_a	S_b
S_a	S_a	S_d	S_b	S_c	id	d_{180}	d_{270}	d_{90}
S_b	S_b	S_c	S_a	S_d	d_{180}	id	d_{90}	d_{270}
S_c	S_c	S_a	S_d	S_b	d_{90}	d_{270}	id	d_{180}
S_d	S_d	S_b	S_c	S_a	d_{270}	d_{90}	d_{180}	id

	UNIVERSITÄT KOBLENZ · LANDAU	Fachbereich 3: Naturwissenschaften MATHEMATISCHES INSTITUT **Dr. Ingrid Hupp**

10. Übungsblatt zu „Diskrete algebraische Strukturen“

Ausgabe: 17.1.2001

Abgabe: 24.1.2001

1. a) Bestimmen Sie mit dem Euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von 18823 und 28007.
   b) Berechnen Sie ganze Zahlen x und y mit
   $18823x + 28007y = ggT(18823, 28007)$.

2. a) Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung
   $$x^2 + 12x + 11 = 0 \bmod 23$$
   b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem
   $$3x - 2y = 5 \bmod 7$$
   $$2x + 3y = 51 \bmod 7$$

3. Sei R ein Ring mit $1 \neq 0$ und sei $a \in R$. Beweisen Sie:
   a) Ist a eine Einheit, dann ist a kein Nullteiler.
   b) Ist a ein Nullteiler, dann ist a keine Einheit.

4. a) Bestimmen Sie mit dem Euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von 988027 und 198403.
   b) Berechnen Sie ganze Zahlen x und y mit
   $988027x + 198403y = ggT(988027,198403)$.

5. Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung $x^2 - 18x + 19 = 0 \bmod 31$.

6. *Def.: Ein von Null verschiedenen Element a eines Ringes R heißt ein Nullteiler, wenn es ein $b \in R$, $b \neq 0$, gibt mit $ba = 0$ oder $ab = 0$.*
   Bestimmen Sie alle Nullteiler im Restklassenring $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

Schriftlich zu bearbeiten und abzugeben sind die Aufgaben Nr. 1, 2 und 3.

Hinweise:
1. *Die Klausur findet am Samstag, 10. Februar 2001, 14-16 Uhr statt.*
2. *Zur Klausur sind keine Hilfsmittel, also auch keine Taschenrechner, zugelassen.*
3. *Zur Klausur ist ein Lichtbildausweis mitzubringen.*
4. *Die Nachklausur findet am Mittwoch, 18. April 2001, 12-14 Uhr statt.*

„Diskrete algebraische Strukturen“
Lösung zum 10. Übungsblatt

Aufgabe 1 a)

$$
\begin{aligned}
28.007 &= 1 * 18.823 + 9.184\\
18.823 &= 2 * 9.184 + 455\\
9.184 &= 20 * 455 + 84\\
455 &= 5 * 84 + 35\\
84 &= 2 * 35 + 14\\
35 &= 2 * 14 + 7\\
14 &= 2 * 7
\end{aligned}
$$

ggT(28.007, 18.823) = 7

Aufgabe 1 b)

$$
\begin{aligned}
7 &= 35 - 2 * 14 = 35 - 2 * (84 - 2 * 35)\\
&= 5 * 35 - 2 * 84 = 5 * (455 - 5 * 84) - 2 * 84\\
&= 5 * 455 - 27 * 84 = 5.455 - 27 * (9.184 - 20 * 455)\\
&= 545 * 455 - 27 * 9.184\\
&= 545 * (18.823 - 2 * 9.184) - 27 * 9.184\\
&= 545 * 18.823 - 1.117 * 9.184\\
&= 545 * 18.823 - 1.117 * (28.007 - 18.823)\\
&= 1.662 * 18.823 - 1.117 * 28.007
\end{aligned}
$$

$x = 1.662$

$y = -1.117$

Aufgabe 2 a)

$x^2 + 12 x + 11 = 0 \mod 23 \quad \Rightarrow$

$x^2 + 2 * 6 x + 36 - 36 11 = 0 \mod 23 \quad \Rightarrow$

$(x + 6)^2 = 25 \mod 23 \quad \Rightarrow$

$x_1 + 6 = 5 \mod 23 \quad \wedge \quad x_2 + 6 = -5 \mod 23$

$x_1 = 22 \mod 23 \quad \wedge \quad x_2 = 12 \mod 23$

Aufgabe 2 b)

$(3x - 2y = 5 \mod 7 \quad \wedge \quad 2x + 3y = 51 \mod 7) \quad \Rightarrow$
$(3x + 5y = 5 \mod 7 \quad \wedge \quad 2x + 3y = 2 \mod 7) \quad \Rightarrow$
$(6x + 3y = 3 \mod 7 \quad \wedge \quad 6x + 2y = 6 \mod 7) \quad \Rightarrow$
$(6x + 3y = 3 \mod 7 \quad \wedge \quad y = 4 \mod 7) \quad \Rightarrow$
$(6x + 12y = 3 \mod 7 \quad \wedge \quad y = 4 \mod 7) \quad \Rightarrow$
$(6x = 5 \mod 7 \quad \wedge \quad y = 4 \mod 7) \quad \Rightarrow$
$(x = 2 \mod 7 \quad \wedge \quad y = 4 \mod 7)$

Aufgabe 3 a)

Sei a Einheit mit $a * a^{-1} = 1$
Annahme: a sei Nullteiler $\Rightarrow$ es existiert $b \in R$, $b \neq 0$ mit $a * b = 0$ oder $b * a = 0$

1. Fall: es existiert $b \neq 0$ mit $a * b = 0$
   $b = (a^{-1} * a) * b = a^{-1} * (a * b) = a^{-1} * 0 = 0$ ↯
2. Fall: es existiert $b \neq 0$ mit $b * a = 0$
   $b = b * (a * a^{-1}) = (b * a) * a^{-1} = 0 * a^{-1} = 0$ ↯

$\Rightarrow$ a ist kein Nullteiler

Aufgabe 3 a)

Sei a Nullteiler. Es existiert $b \in R$ mit $b \neq 0$ und $a * b = 0$ oder $b * a = 0$
Annahme: a sei Einheit, d.h. es existiert a^{-1} mit $a * a^{-1} = a^{-1} * a = 1$

1. Fall: es existiert $b \neq 0$ mit $a * b = 0$
   $b = (a^{-1} * a) * b = a^{-1} * (a * b) = a^{-1} * 0 = 0$ ↯
2. Fall: es existiert $b \neq 0$ mit $b * a = 0$
   $b = b * (a * a^{-1}) = (b * a) * a^{-1} = 0 * a^{-1} = 0$ ↯

$\Rightarrow$ a ist kein Nullteiler

	UNIVERSITÄT KOBLENZ · LANDAU	Fachbereich 3: Naturwissenschaften MATHEMATISCHES INSTITUT **Dr. Ingrid Hupp**

11. Übungsblatt zu „Diskrete algebraische Strukturen“

Ausgabe: 24.1.2001
Abgabe: 31.1.2001

1. Sei Po die Menge aller reellen Polynome; für Polynome p aus Po sei N(p) die Menge der Nullstellen von p, P (**R**) sei die Potenzmenge der reellen Zahlen.
   Die Abbildung Φ: (Po, ·) → (P (**R**) , ∪) ist definiert durch Φ (p) = N (p).
   Ist Φ ein Homomorphismus? Ist Φ ein Isomorphismus?
   Begründen Sie Ihre Antworten.

2. Sei G eine Gruppe und U eine Untergruppe von G mit $|U| = 2$.
   Zeigen Sie, daß U ein Normalteiler ist.

3. Geben Sie alle Isomorphietypen von Gruppen mit maximal 7 Elementen an.

4. Untersuchen Sie, ob f: (**N**, ·) → (**R**, ·) mit $f(n) = \frac{1}{n^2}$ ein Homo- bzw. Isomorphismus ist.

5. Zeigen Sie, daß die Untergruppe der Drehungen ein Normalteiler in der Diedergruppe D_3 ist.

6. Zeigen Sie, daß es für Gruppen mit vier Elementen nur zwei verschiedene Isomorphietypen gibt.

Schriftlich zu bearbeiten und abzugeben sind die Aufgaben Nr. 1, 2 und 3.

„Diskrete algebraische Strukturen“
Lösung zum 11. Übungsblatt

Aufgabe 1

ϕ ist Homomorphismus

<u>Beweis:</u> Sei $p * q \in Po$

$\phi(p * q) = \phi(p) \cup \phi(q) \Leftrightarrow$

$N(p * q) = N(p) \cup N(q) \Leftrightarrow$

(x_0 Nullstelle von $p(x) * q(x) \Leftrightarrow x_0$ ist Nullstelle von $p(x)$ oder x_0 ist Nullstelle von $q(x)$)

ϕ ist kein Isomorphismus

<u>Beweis:</u> ϕ ist nicht injektiv

Sei $p(x) = x - 1$ und $g(x) = 2x - 2$

Dann gilt: $\phi(p) = N(p) = \{1\}$ und $\phi(q) = N(q) = \{1\}$ aber $p \neq q$

Aufgabe 2

$|G : U| = 2$

Es gibt genau 2 Nebenklassen

$G = U \cup gU = U \cup Ug$ mit $g \notin U$ und $gU \cap U = \emptyset$

$\Rightarrow gU = Ug \quad \forall g \notin U$

Zudem gilt stets $gU = U = Ug \quad \forall g \in U$

$\Rightarrow gU = Ug \quad \forall g \in U$

$\Rightarrow$ U ist Normalteiler

Aufgabe 3

$\lvert G \rvert = 1$	$G = \{e\}$		
$\lvert G \rvert = 2$	$G \triangleq C_2$	d.h. $G = \{e, a\}$ mit $a^2 = e$	
$\lvert G \rvert = 3$	$G \triangleq C_3$	d.h. $G = \{e, a, a^2\}$ mit $a^3 = e$	
$\lvert G \rvert = 4$	$G \triangleq C_4$	oder	$G \triangleq V_4$ (Aufgabe 6)
$\lvert G \rvert = 5$	$G \triangleq C_5$		
$\lvert G \rvert = 6$	$G \triangleq C_6$	oder	$G \triangleq D_3 \triangleq S_3$
$\lvert G \rvert = 7$	$G \triangleq C_7$		

UNIVERSITÄT KOBLENZ · LANDAU	Fachbereich 3: Naturwissenschaften MATHEMATISCHES INSTITUT **Dr. Ingrid Hupp**

12. Übungsblatt zu „Diskrete algebraische Strukturen“

Ausgabe: 31.1.2001

Abgabe: keine Abgabe!

1. Seien $(M, \leq)$ ein Verband und $x, y, z \in M$.
   Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck so weit wie möglich:
   $(x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap ((x \sqcap (z \sqcap y)) \sqcup x))$

2. Zeichnen Sie die Hasse-Diagramme zu allen Verbänden mit höchstens 5 Elementen.

3. Gegeben sei die Menge $V = \{0, p, q, 1\}$ mit den Verknüpfungen + und *.
   Stellen Sie die Verknüpfungstafeln und die Tabelle der komplementären Elemente so auf, daß eine Boolesche Algebra entsteht.

4. Seien $(M, \leq)$ ein Verband und $x, y, z \in M$.
   Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck so weit wie möglich:
   $(x \sqcup ((y \sqcup z) \sqcap x)) \sqcap ((y \sqcup (z \sqcap y)) \sqcap x)$

5. a) Die Menge der Teiler der Zahl 72 bildet zusammen mit der Halbordnung "ist Teiler von" einen Verband. Zeichnen Sie das Hasse – Diagramm.
   b) Die Menge der Teiler der Zahl 32 bildet zusammen mit der Halbordnung "ist Teiler von" einen Verband. Zeichnen Sie das Hasse – Diagramm.

6. Die Schaltwerte 0 (= "kein Strom") und 1 (= "Strom") bilden zusammen mit den Operationen Parallelschaltung $\vee$ und Reihenschaltung $\wedge$ einen Verband.
   Seien A, B und C Schalter. Zeichnen Sie die Schaltung zu dem Ausdruck
   $(A \wedge B) \vee (C \wedge (A \vee B))$
   Bei welchen Schalterstellungen von A, B und C fließt Strom?

Definition

Eine halbgeordnete Menge $(M, \leq)$ heißt *Verband* (engl. *lattice*), wenn es zu $a, b \in M$ stets ein kleinstes Element x mit $a, b \leq x$ gibt, *Supremum* genannt, Schreibweise $a \sqcup b := x$ (engl. cup), ein größtes Element y mit $y \leq a, b$ gibt, *Infimum* genannt, Schreibweise $a \sqcap := y$ (engl. cap).

„Diskrete algebraische Strukturen“
Lösung zum 12. Übungsblatt

Aufgabe 1

$(x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap ((x \sqcap (z \sqcap y)) \sqcup x))$ = KG =
$(x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap ((x \sqcup (x \sqcap (z \sqcap y))))$ = Abs =
$(x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap x)$ = idemp. =
$(x \sqcap y) \sqcup x$ = KG =
$x \sqcup (x \sqcap y)$ = Abs. =
x

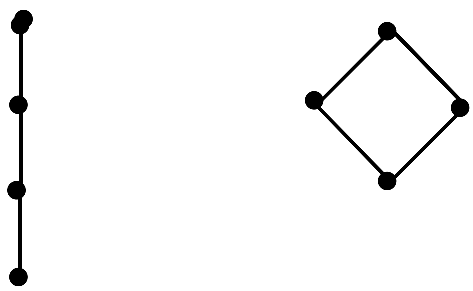
Aufgabe 2

1 Element:

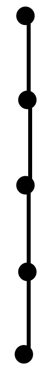
2 Elemente:

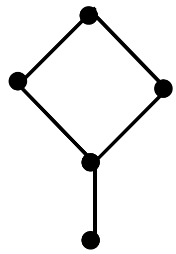
3 Elemente:

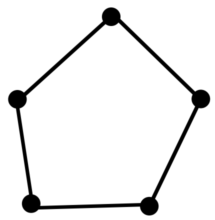
4 Elemente:

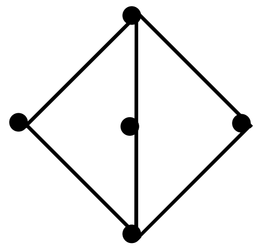


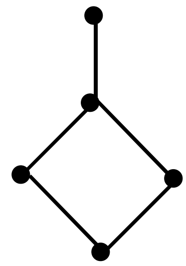
5 Elemente:











Aufgabe 3

+	**O**	**p**	**q**	**1**
O	O	p	q	1
p	p	p	1	1
q	q	1	q	1
1	1	1	1	1

•	**O**	**p**	**q**	**1**
O	O	O	O	O
p	O	p	O	p
q	O	O	q	q
1	O	p	q	1

$\overline{O} = 1$
$\overline{p} = q$
$\overline{q} = p$
$\overline{1} = O$