	U N I V E R S I T Ä T **KOBLENZ · LANDAU**	Fachbereich 3: Naturwissenschaften M A T H E M A T I S C H E S I N S T I T U T **Prof. Dr. J. Eckhoff**

Übung zur Vorlesung

Diskrete algebraische Strukturen

Dozent: Prof. Dr. J. Eckhoff

Übungsleiter: Dr. Ingrid Hupp

Inhaltsverzeichnis

UNIVERSITÄT
KOBLENZ · LANDAU

Fachbereich 3: Naturwissenschaften
MATHEMATISCHES INSTITUT
Prof. Dr. J. Eckhoff

1. Übungsblatt zu “Diskrete algebraische Strukturen”

Ausgabe 05.11.2001
Abgabe 12.11.2001

1. Beweisen Sie durch vollständige Induktion:
   Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $n^3 - n$ durch 6 teilbar.

2. Beweisen Sie durch vollständige Induktion,
   dass für jede natürliche Zahl n gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}\, n\,(n+1)\,(2n+1)$$

3. Beweisen oder widerlegen Sie:

   a) $A \cup B = B \Leftrightarrow B \setminus A = \emptyset$

   b) $A \cap B = A \setminus ((A \cup B) \setminus B)$

4. Bestimmen Sie ein kleinstes $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geqslant n_0$ gilt:
   $3^n > n^3$

5. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion nach n:
   $n^5 - n$ ist durch 5 teilbar.

6. Beweisen oder widerlegen Sie:

   a) $\overline{(A \cap B) \cup C} = (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap \overline{C}$

   b) $A \cap B \cap C \subset A \triangle (B \triangle C)$.

Schriftlich zu bearbeiten und abzugeben sind die Aufgaben Nr. 1, 2 und 3.

„Diskrete algebraische Strukturen“
Lösung zum 1. Übungsblatt

Aufgabe 1:

Induktionsvoraussetzung: $n^3 - n$ ist durch 6 teilbar

Induktionsanfang: n = 1 $\quad 1^3 - 1 = 0 = 0 * 6 \quad \checkmark$

Induktionsschluß: $n \to n + 1$

$$(n + 1)^3 - (n + 1)$$
$$= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - (n + 1)$$
$$= \underbrace{(n^3 - 1)}_{\downarrow} + 3 * (n^2 + n)$$

nach Induktionsvoraussetzung durch 6 teilbar

Aufgabe 2:

Induktionsvoraussetzung: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

Induktionsanfang: n = 1 $\quad \sum_{k=1}^{1} 1^2 = \frac{1}{6} * 1 * 2 * 3 = 1 = 1^2 \quad \checkmark$

Induktionsschluß: $n \to n + 1$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (k+1)^2$$
$$= \frac{1}{6} n(n+1)(n+2) + (n+1)^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)$$

q.e.d.

Aufgabe 3:

a) ist allgemein falsch:

$A \cup B = B \iff A \subset B \iff A \setminus B = \emptyset$

Beide Äquivalenzen sind leicht zu zeigen.

b) ist richtig:

offenbar ist $(A \cup B)\backslash B = A\backslash B$, und A ist disjunkt zerlegt zu $A\backslash B$ und $A \cap B$.

Es folgt: $A\backslash((A \cup B)\backslash B) = A\backslash(A\backslash B) = A \cap B$

U N I V E R S I T Ä T
KOBLENZ · LANDAU

Fachbereich 3: Naturwissenschaften
MATHEMATISCHES INSTITUT
Prof. Dr. J. Eckhoff

2. Übungsblatt zu “Diskrete algebraische Strukturen”

7. Seien A, B $\subset$ X und U, V $\subset$ Y Mengen, F : X $\to$ Y eine Abbildung. Zeigen Sie:
   a) $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$
   b) $f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$
   c) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
   d) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
   Gilt in d) sogar Gleichheit?

8. Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen injektiv, surjektiv oder bijektiv sind:
   a) $q : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $u \mapsto q(u)$,
   q(u) ist die Quersumme von u
   b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (x^2 + 1, x(x-1))$
   c) $g : M \times M \to \mathcal{P}(M) \setminus o$, $(x, y) \mapsto \{x, y\}$
   (M sei eine nichtleere Menge)

9. Sei f: A $\to$ B eine Abbildung. Zeigen Sie:

   Existiert eine Abbildung $g : B \to A$ mit $g \circ f = Id_A$, so ist f injektiv.
   Ist g durch f eindeutig bestimmt?

10. Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

    Sind A, B Mengen mit $|A| = |B| = u \in \mathbb{N}$ und ist $f : A \to B$ injektiv,
    so ist f sogar bijektiv.

11. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ auf Injektivität und Surjektivität:
    a) $f : u \mapsto |u^2 - 5| + 1$
    b) $f : u \mapsto u + (-1)^{u+1}$
    c) $f : u \mapsto \begin{cases} 3u+1 & (\textit{falls u ungerade ist}) \\ \frac{u}{2} & (\textit{falls u gerade ist}) \end{cases}$

    Berechnen Sie $f \circ f$ im Fall c).

12. Sei $\alpha : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

    Existiert eine Abbildung $\beta : Y \to X$ mit $\alpha \circ \beta = Id_Y$, so ist α surjektiv.
    Kann es mehrere solche β geben?

„Diskrete algebraische Strukturen“
Lösung zum 2. Übungsblatt

Aufgabe 7:

a) – d) folgen unmittelbar aus der Definition von f^{-1} und den Eigenschaften von $\cap$ und $\cup$.

Z.B. d) Sei $y \in f(A \cup B)$. Dann existiert ein $x \in A \cap B$ mit $f(x) = y$. Wegen $x \in A$ ist $f(x) \in f(A)$, wegen $x \in B$ ebenso $f(x) \in f(B)$. Es folgt: $f(x) \in f(A) \cap f(B)$, d.h. $y \in f(A) \cap f(B)$.

Im Allgemeinen gilt in d) keine Gleichheit: Sei etwas $X = Y = \mathbb{R}$.

$f: x \rightarrow x^2$ $\quad A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$ $\quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

Dann ist $f(A \cap B) = f(\{0\}) = \{0\}$, aber $f(A) \cap f(B) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

Aufgabe 8:

a) Wegen $q(1) = q(10)$ ist q nicht injektiv, wegen $q(11 \ldots) = n \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$ aber surjektiv.
$\downarrow$
n – mal

b) f ist injektiv: Ist $f(x) = f(y)$, d.h. $(x^2 + 1, x(x - 1)) = (y^2 + 1, y(y - 1))$,
d.h. $x^2 + 1 = y^2 + 1$, $x^2 - x = y^2 - y$, so ist

f nicht surjektiv, denn für $a < 1$ ist $(a, b) \in f(\mathbb{R})$

c) g ist weder injektiv noch surjektiv. Für $x, y \in M$, $x \neq y$ ist $g(x, y) = \{x, y\} = g(y, x)$.

Für $A \subset M$, $|A| = 3$ ist z.B. $A \notin g(M \times M)$.

Aufgabe 9:

Annahme: f ist nicht injektiv. Dann existieren $a, a' \in A$ mit $a \neq a'$, $f(a) = f(a')$.

Es folgt: $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(a')$ wegen $g \circ f = Id_A$ ist aber $(g \circ f)(a) = a \neq a' = (g \circ f)(a')$. Aus diesem Widerspruch folgt die Behauptung.

g ist nicht eindeutig durch f bestimmt: Sei $A = B = \mathbb{R}$. $\quad f: x \rightarrow e^x$; f ist injektiv.

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfülle $g(x) = \ln(x)$, $x > 0$.

Wie auch immer $g(x)$ für $x \leq 0$ definiert wird, es gilt $g \circ f = Id_{\mathbb{R}}$

UNIVERSITÄT
KOBLENZ · LANDAU

Fachbereich 3: Naturwissenschaften
MATHEMATISCHES INSTITUT
Prof. Dr. J. Eckhoff

3. Übungsblatt zu "Diskrete algebraische Strukturen"

Ausgabe: 19.11.2001
Abgabe: 26.11.2001

13. Untersuchen Sie die folgenden Relationen hinsichtlich Reflexivität, Symmetrie, Antisymmetrie und Transitivität:

    $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + 3y \text{ ist gerade } \}$

    $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x^2 = y \}$

    $R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \mid y\}$

14. Geben Sie Beispiele für nichtleere Relationen an, die
    a) genau eine,
    b) genau zwei
    der Eigenschaften „reflexiv", „symmetrisch", „transitiv" haben. Betrachten Sie alle Möglichkeiten. Beweise sind nicht erforderlich.

15 a) Sei R eine Äquivalenzrelation auf M. Sind auch $\overline{R}$ und R^{-1} Äquivalenzrelationen auf M? (Nachweise erforderlich!)

   b) Zeigen Sie, dass $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = y \wedge xy > 0\}$ eine Äquivalenzrelation definiert. Wie sehen die zugehörigen Äquivalenzklassen aus?

16. Untersuchen Sie, ob die Relation $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x-y| <= \min(|x|, |y|)\}$ reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv, konnex ist.

17. Seien R und S Äquivalenzrelationen auf einer gemeinsamen Menge M. Sind
    a) $R \cap S$,
    b) $R \cup S$,
    c) $R \setminus S$,
    d) $R \circ S$.
    ebenfalls Äquivalenzrelationen auf M?

18. Sei s eine feste reelle Zahl. Zeigen Sie, dass durch
    $(x_1, y_1)\ R\ (x_2, y_2) :\Leftrightarrow (y_2 - y_1) = s \cdot (x_2 - x_1)$
    eine Äquivalenzrelation R auf $\mathbb{R}^2$ definiert wird.
    Beschreiben Sie die Klassen von R und geben Sie ein Vertretersystem an.

Schriftlich zu bearbeiten und abzugeben sind die Aufgaben Nr. 13, 14 und 15.

„Diskrete algebraische Strukturen“
Lösung zum 3. Übungsblatt

Aufgabe 13:

1. R_1 ist reflexiv. $x + 3x = 4x$ ist gerade

   R_1 ist symmetrisch. $x + 3x$ gerade $\Rightarrow$ x, y gerade $\vee$ x, y ungerade

   $\Rightarrow$ $y + 3x$ gerade

   R_1 ist nicht antisymmetrisch. $(1, 3), (3, 1) \in R$

   R_1 ist transitiv. $x + 3y, y + 3z$ gerade $\Rightarrow$ x, y, z gerade $\vee$ x, y, z ungerade

   $\Rightarrow$ x, z gerade

Bemerkung: R_1 ist die Kongruenz mod 2

2. R_2 ist nicht reflexiv. $x > 1 \Rightarrow x^2 > x$

   R_2 ist nicht symmetrisch. $x^2 = y, y^2 = x \Rightarrow y = y^4$

   $\Rightarrow y = 1$

   R_2 ist antisymmetrisch. $x^2 = y, y^2 = x \Rightarrow x = y = 1$

   R_2 ist nicht transitiv. $x^2 = y, y^2 = z \Rightarrow x^4 = z$

   $\Rightarrow x^2 < z$ für $x > 1$

3. R_3 ist reflexiv. $x = 1 * x \Rightarrow x / x$

   R_3 ist nicht symmetrisch. $3 / 6,\ 6 \nmid 3$

   R_3 ist antisymmetrisch. $x / y, y / z \Rightarrow y = s * x, x = t * y$ mit $x, t \in \mathbb{N}$

   $\Rightarrow y = (st)\, y$

   $\Rightarrow s = t = 1 \Rightarrow x = y$

   R_3 ist transitiv. $x / y, y / z \Rightarrow y = s * x, x = t * y$ mit $x, t \in \mathbb{N}$

   $\Rightarrow z = (st)\, x \Rightarrow x / z$

Aufgabe 14:

a) „genau reflexiv“

$M = \{1, ..., 5\}$

$R = I \cap \{(2, 3), (3, 4)\}$

nicht symmetrisch: $(3, 2) \notin R$

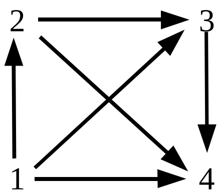
nicht transitiv: $(2, 3), (3, 4) \in R$, $(2, 4) \notin R$

„genau symmetrisch“

M: Menge aller Geraden in $\mathbb{R}^2$

$g\ R\ h \iff g \perp h$

„genau transitiv“



$M = \{1, 2, 3, 4\}$

$R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$

nicht reflexiv: $(1, 1) \notin R$

nicht symmetrisch: $(1, 2) \in R$, $(2, 1) \notin R$

b) „genau reflexiv und symmetrisch“

$M = \{1, ..., 5\}$

$R = I \cap \{(2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3)\}$

nicht transitiv: $(2, 3), (3, 4) \in R$ aber $(2, 4) \notin R$

„genau reflexiv und transitiv“

$M = P(X)$

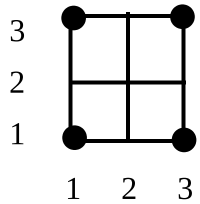
R: Inklusion

reflexiv und transitiv: $A \subset A$

$A \subset B,\ B \subset C \Rightarrow A \subset C$

nicht symmetrisch: $A \subset B,\ B \subset A \Rightarrow A = B$

„genau symmetrisch und transitiv“



$M = \{1, 2, 3\}$

$R = \{(1,2), (1,3), (3,1), (3,3)\}$

nicht reflexiv: $(2, 2) \notin R$

Aufgabe 15:

a) $\overline{R}$ ist keine Äquivalenzrelation:

$I \subset R \;\Rightarrow\; I \cap \overline{R} = \varnothing$

R^{-1} ist Äquivalenzrelation:

$I \subset R,\; R^{-1} = R,\; R \, o \, R^{-1} \subset R \;\Rightarrow\; I \subset R^{-1},\, (R^{-1})^{-1},\, R^{-1} \, o \, (R^{-1})^{-1} \subset R^{-1}$

b) Sei S die Relation (vgl. R_1 in Aufgabe 13)

S ist reflexiv: $(x, x) \in R$

S ist symmetrisch: $xy = yx \;\Rightarrow\; (x, y) \in S \;\Rightarrow\; (y, x) \in S$

S ist transitiv: $xy > 0,\, yz > 0 \;\Rightarrow\; x, y, z > 0 \,\vee\, x, y, z < 0 \;\Rightarrow\; xz > 0$

Es gibt 3 Äquivalenzklassen: $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

$\{x \in \mathbb{R} \mid x = 0\}$

$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

UNIVERSITÄT
KOBLENZ · LANDAU

Fachbereich 3: Naturwissenschaften
MATHEMATISCHES INSTITUT
Prof. Dr. J. Eckhoff

4. Übungsblatt zu “Diskrete algebraische Strukturen”

Ausgabe: 26.11.2001
Abgabe: 03.12.2001

19. a) Auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ wird durch
$(a,b) \sim (c,d) :\Leftrightarrow a + d = b + c$
eine Äquivalenzrelation definiert wird. Beweisen Sie diese Aussage. Wie lassen sich die Äquivalenzklassen beschreiben?

b) Definiert auch
$(a,b) \sim (c,d) :\Leftrightarrow a + c = b + d$
eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$?

20. Sind die folgenden Relationen Äquivalenzrelationen?
a) $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x|y \text{ und } y|x\}$
b) $S = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x|y \text{ oder } y|x\}$
Begründen Sie Ihre Behauptungen.
Geben Sie auch die Äquivalenzklassen an (falls vorhanden).

21. Zeichnen Sie die Hassediagramme der folgenden durch die Teilerrelation geordneten Mengen:
a) der Menge der Zahlen 1, ... 10,
b) der Menge der Teiler von 500,
c) der Menge der Teiler von 675.
Fällt Ihren etwas auf? Zeichnen Sie im Fall a) auch ein Pfeildiagramm der Relation.

22. Weisen Sie nach, dass durch die Vorschrift
$(k, l) \sim (m, n) :\Leftrightarrow kn = lm$
eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ definiert wird.
Welche Paare ganzer Zahlen bilden eine Äquivalenzklasse?
Geben Sie ein Vertretersystem an.

23. Seien $(M, \leq)$ und $(N, \leq)$ linear geordnete Mengen. Wird durch die Festsetzung
$(x, y) \leq (x', y') :\Leftrightarrow x < x' \text{ oder } x = x', y \leq y'$
eine Ordnung auf M x N definiert? Wenn ja, ist sie linear?

24. Sei T(n) die Menge aller Teiler von n, geordnet durch die Teilbarkeitsrelation.
Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist T(n) linear geordnet?

Schriftlich zu bearbeiten und abzugeben sind die Aufgaben Nr. 19, 20 und 21.

Nachtrag
Der Korrektor Benjamin Knörlein ist unter benknoe@uni-koblenz.de zu erreichen.

„Diskrete algebraische Strukturen“
Lösung zum 4. Übungsblatt

Aufgabe 19:

a) R ist reflexiv. $a + b = b + a$, d.h. $(a, b) \sim (b, a)$

R ist symmetrisch. $a + d = b + c \Rightarrow c + b = d + a$,
d.h. $(a, b) \sim (c, d) \Rightarrow (c, d) \sim (a, b)$

R ist transitiv. $a + d + d + f = b + c + d + e \Rightarrow a + f = b + e$,
d.h. $(a, b) \sim (c, d) \sim (e, f) \Rightarrow (a, b) \sim (e, f)$

Äquivalenzklassen: alle 45º - Linien in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, d.h.

$\{(1; 1); (2; 2); (3; 3); ...\}$

$\{(2; 1); (3; 2); (4; 3); ...\}$

$\{(1; 2); (2; 3); (3; 4); ...\}$

Vertretersystem: $\{(a; b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a = 1 \vee b = 1\}$

b) nein!

$(1, 2) \sim (3, 2)$; $(3, 2) \sim (3, 4)$ aber $(1, 2) \not\sim (3, 4)$

Aufgabe 20:

a) ja! $(x, y) \in R \Leftrightarrow x \mid y \wedge y \mid x \Rightarrow x = y \vee x = -y$, daraus folgt alles.

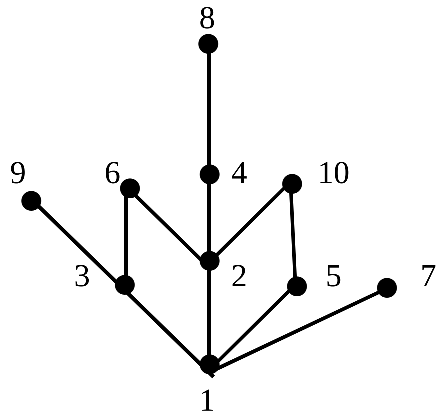
Äquivalenzklassen: $\{0\}$, $\{n, -n\}$ $n \in \mathbb{N}$

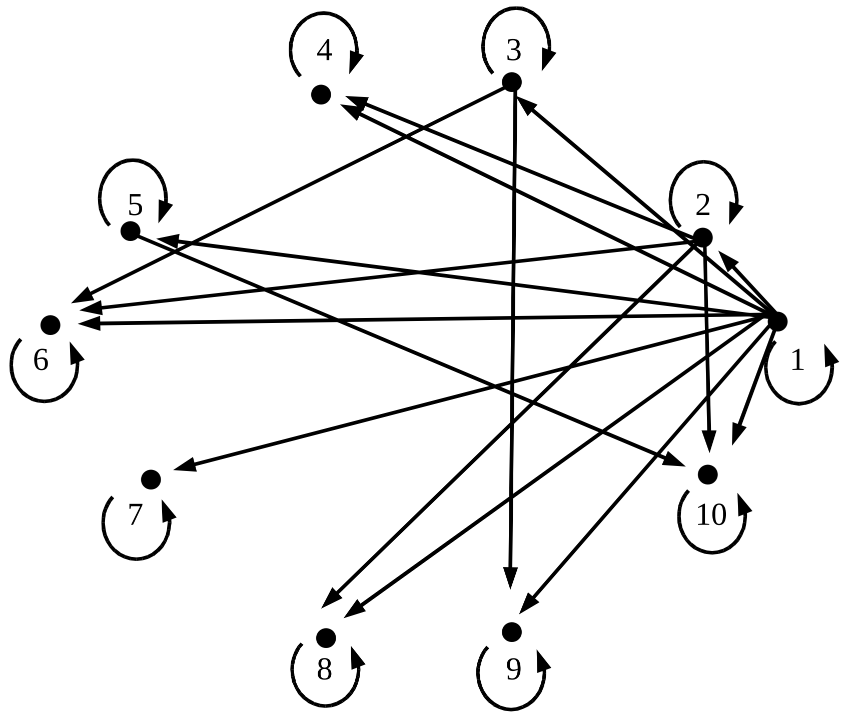
b) nein!

6 S 3 3 S 9 aber 6 $\cancel{S}$ 9

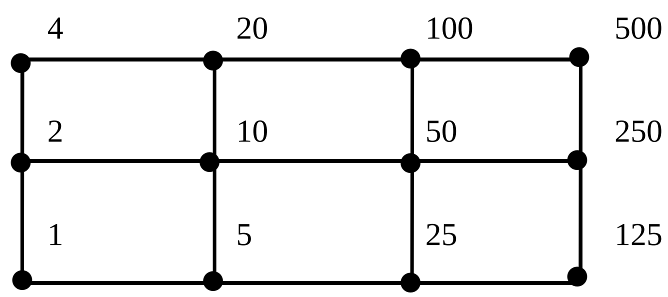
Aufgabe 21:

a)

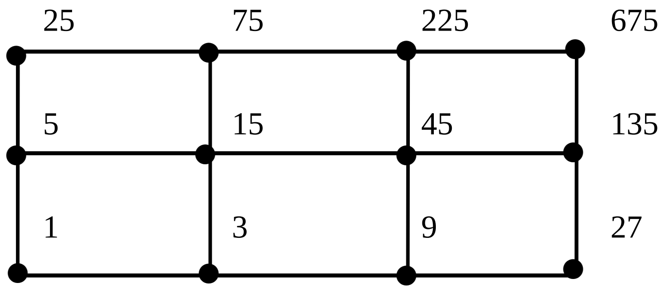




b) M = {1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100, 125, 250, 500}



c) M = {1, 2, 5, 9, 15, 25, 27, 45, 75, 135, 225, 675}



Offenbar sind die Ordnungen in b) und c) „ordnungsisomorph“, da $2^2\ 5^3 = 500$ und $5^2\ 3^3 = 675$.

U N I V E R S I T Ä T
KOBLENZ · LANDAU

Fachbereich 3: Naturwissenschaften
MATHEMATISCHES INSTITUT
Prof. Dr. J. Eckhoff

5. Übungsblatt zu “Diskrete algebraische Strukturen”

Ausgabe: 03.12.2001
Abgabe: 10.12.2001

25. Sei T (990) die durch die Teilbarkeitsrelation geordnete Menge aller Teiler von 990.

a) Geben Sie die maximalen, minimalen, größten und kleinsten Elemente sowie Supremum und Infimum der folgenden Mengen an (sofern vorhanden).
$A = \{10, 18, 30\}$
$B = \{5, 55, 66, 330\}$

b) Welche Elemente von T (990) sind zu 165 benachbart?

26. Gibt es eine geordnete Menge, die genau ein maximales Element, aber kein Supremum besitzt? Begründen Sie Ihre Antwort.

27. Bilden Sie die durch Inklusion geordnete Potenzmenge von {a, b, c} bijektiv und monoton auf die in üblicher Weise geordnete Menge {1, ..., 8} ab. Wieviele derartige Abbildungen gibt es?

28. Belegen Sie die folgenden Aussagen durch Angabe geeigneter geordneter Mengen A.

a) Maximale, minimale, größte und kleinste Elemente, Supremum und Infimum von A müssen nicht existieren.

b) A kann mehrere maximale Elemente haben.

c) Sup A und Inf A müssen, falls vorhanden, nicht in A liegen.

29. Seien $m, n \in \mathbb{N}$ teilerfremd.
Zeigen Sie: T(mn) und das direkte Produkt T(m) x T(n) sind ordnungsisomorph. Gilt das auch, wenn m und n nicht teilerfremd sind?

30. Auf der Menge der Partitionen von M lässt sich durch:
$\{A_1; ...; A_s\} \leqslant \{B_1; ...; B_t\} \Leftrightarrow \forall\, i \in \{1; ...; s\}\ \exists\, j \in \{1; ...; t\}: A_i \subset B_j$
eine Ordnung definieren:

a) Beweisen Sie diese Aussage.

b) Zeichnen Sie das Hassediagramm der Ordnung für M = {1; 2; 3; 4}.

c) Wie lässt sich das Infimum zweier Partitionen beschreiben?

Schriftlich zu bearbeiten und abzugeben sind die Aufgaben Nr. 25, 26 und 27.

„Diskrete algebraische Strukturen“
Lösung zum 5. Übungsblatt

Aufgabe 25:

Man liest die Antworten der Primfaktorzerlegung $990 = 2 * 3^2 * 5 * 11$ ab.

a) A = {10; 18; 30}	maximal:	18; 30
	minimal:	10; 18
	Supremum:	90 = kgV(10; 18; 30)
	Infimum:	2 = ggT(10; 18; 30)
B = {5; 55; 66; 330}	maximal:	330
	minimal:	5; 66
	größtes Element: 330	
	Supremum:	330
	Infimum:	1

b) $165 = 3 * 5 * 11 \Rightarrow$ benachbart zu 165 in T(990) sind 15, 33, 55, 330, 495

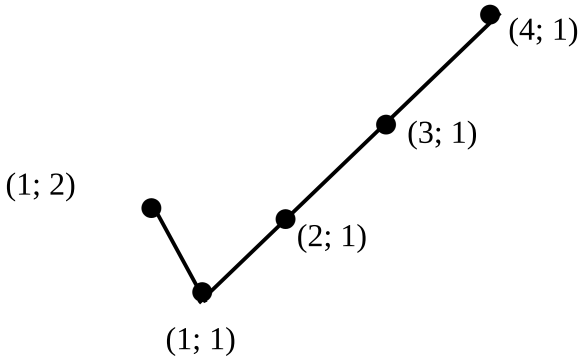
Aufgabe 26:

ja!

Sei $M = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (direktes Produkt der gewöhnlichen Ordnungen, $A \subset C$ mit:

$A = \{(n, 1) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{(1; 2)\}$ (incl. Ordnung).

(1; 2) ist einziges maximales Element, Supremum A existiert nicht.



Aufgabe 27:

Nach der Vorschrift im Beweis von Satz 3.9. der Vorlesung wird etwa wie folgt abgebildet:

$\emptyset \rightarrow 1$

$\{a\} \rightarrow 2$

$\{b\} \rightarrow 3$

$\{c\} \rightarrow 4$

$\{a, b\} \rightarrow 5$

$\{a, c\} \rightarrow 6$

$\{b, c\} \rightarrow 7$

$\{a, b, c\} \rightarrow 8$

Die Freiheit, die man bei der Definition der monotonen Bijektion hat, ist die Permutation der Elemente innerhalb der obigen Gruppen.

Man kann die Elemente innerhalb der obigen Gruppen peromutieren, so entstehen 3! * 3! = 36 monotone Bijektionen. Zusätzlich gibt es noch 12 weitere Lösungen, z.B.

$\emptyset \rightarrow 1$

$\{a\} \rightarrow 2$

$\{b\} \rightarrow 3$

$\{c\} \rightarrow 5$

$\{a, b\} \rightarrow 4$

$\{a, c\} \rightarrow 6$

$\{b, c\} \rightarrow 7$

$\{a, b, c\} \rightarrow 8$

Also gibt es insgesamt 48 Lösungen!

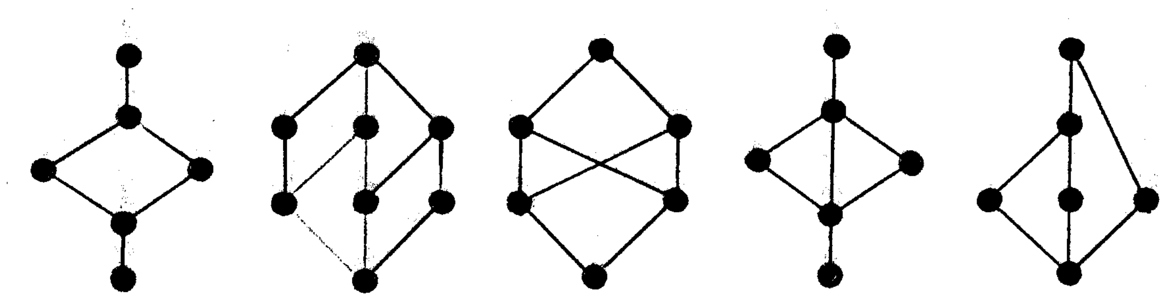
UNIVERSITÄT
KOBLENZ · LANDAU

Fachbereich 3: Naturwissenschaften
MATHEMATISCHES INSTITUT
Prof. Dr. J. Eckhoff

6. Übungsblatt zu “Diskrete algebraische Strukturen”

Ausgabe: 10.12.2001
Abgabe: 17.12.2001

31. Welche der folgenden Diagramme sind Hassediagramme von Verbänden?
(Begründung erforderlich)



a) b) c) d) e)

32. Welche Verbände mit höchstens 5 Elementen sind distributiv, welche komplementär?
(Begründung erforderlich)

33. Sei $(M, \wedge, \vee)$ ein distributiver Verband. Zeigen Sie:

a) $x \wedge y = x \wedge z,\ x \vee y = x \vee z \quad \Rightarrow \quad y = z \ (x, y, z \in M)$

b) Besitzt M ein Null- und ein Einselement, so hat jedes $x \in M$ höchstens ein Komplement.

34. Zeichnen Sie die Hassediagramme aller (nichtisomorphen) Verbände mit höchstens 5 Elementen.

35. Sei $\{0, 1\}^n$ die Menge der 0-1-Folgen der Länge n, geordnet durch:
$(x_1, ..., x_n) \leq (y_1, ..., y_n) :\Leftrightarrow (x_i = 1 \Rightarrow y_i = 1, i = 1, ..., n)$
Ist $\{0, 1\}^n$ mit dieser Ordnung ein Verband ?
Wenn ja: ist er distributiv? ist er komplementär?

36. Zeigen Sie: T(n) ist genau dann ein Boolescher Verband, wenn n quadratfrei ist (d.h. Produkt verschiedener Primzahlen).

Schriftlich zu bearbeiten und abzugeben sind die Aufgaben Nr. 31, 32 und 33.

„Diskrete algebraische Strukturen“
Lösung zum 6. Übungsblatt

Aufgabe 31:

Verbände sind a), b), und e). Man gehe kurz die Elementenpaare durch:

c) ist kein Verband, weil $\inf\{x, y\}$ nicht existiert (x, y seien die Nachbarn des größten Elements)

d) ist kein Hassediagramm

Aufgabe 32:

Die fraglichen Verbände wurden in der Übungsgruppe aufgelistet (Aufgabe 34).

Nicht distributiv sind 7) und 8).

In 7) ist $x \wedge (y \vee z) = x \wedge 1 = x$, aber $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = y \vee 0 = y$.

In 8) ist $x \wedge (y \vee z) = x \wedge 1 = x$, aber $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = 0 \vee 0 = 0$.

Nicht komplementär sind 3), 4), 6), 9) und 10) die gekennzeichneten Elemente haben kein Komplement.

Aufgabe 33:

a)

a)	$y = y \vee (x \wedge y)$	Absorptionsgesetz
	$y = y \vee (x \wedge z)$	
	$y = (y \vee x) \wedge (y \vee z)$	Distributivgesetz
	$y = (z \vee x) \wedge (z \vee y)$	
	$y = z \vee (x \wedge y)$	Distributivgesetz
	$y = z \vee (x \wedge z)$	
	$y = y$	Absorptionsgesetz

b) Wäre $x \wedge y = x \wedge z = 0$, $x \vee y = x \vee z = 1$, so folgte nach a), daß $y = z$.

UNIVERSITÄT
KOBLENZ · LANDAU

Fachbereich 3: Naturwissenschaften
MATHEMATISCHES INSTITUT
Prof. Dr. J. Eckhoff

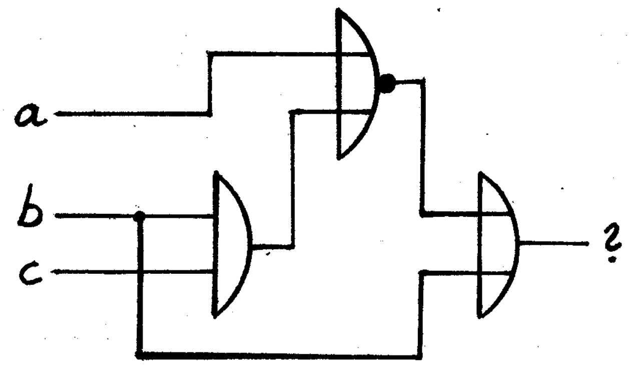
7. Übungsblatt zu "Diskrete algebraische Strukturen"

Ausgabe: 17.12.2001
Abgabe: 07.01.2002

37. a) Vereinfachen Sie den Booleschen Ausdruck
$(x \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y)$.
b) Geben Sie die disjunktive Normalform der folgenden Booleschen Funktion an.
$$f(x, y, z) = \overline{((\bar{x} \vee y) \vee \bar{z}} \wedge (x \vee y)) \wedge x$$

38. Realisieren Sie die Schaltfunktionen ß$_5$ und ß$_{10}$ durch Schaltwerke aus NAND-Gattern.

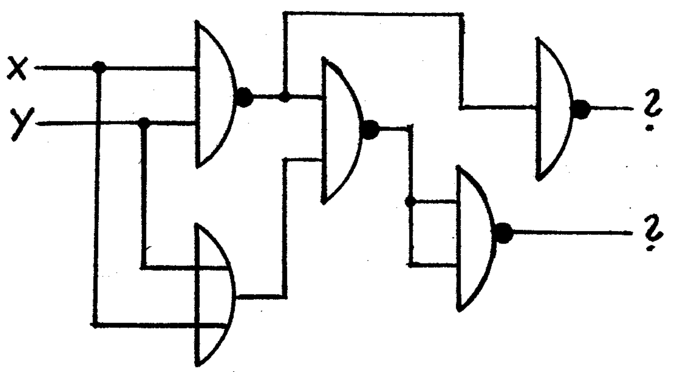
39. Beschreiben Sie die Wirkung des folgenden Schaltwerks durch einen Booleschen Ausdruck in a, b und c:



40. a) Vereinfachen Sie den Booleschen Ausdruck
$((x \wedge y) \vee (x \vee z)) \wedge (\bar{z} \vee (x \wedge \bar{y}))$.
b) Bestimmen Sie die disjunktive Normalform von
$f(a, b, c, d) = ((a \wedge b) \vee (c \wedge d)) \wedge \overline{a \wedge c}$

41. Drücken Sie die Konjunktion und die Disjunktion durch die NOR-Funktion aus.

42. Wie wirkt das folgende Schaltwerk auf die Booleschen Variablen x und y?



Schriftlich zu bearbeiten und abzugeben sind die Aufgaben Nr. 37, 38 und 39.

„Diskrete algebraische Strukturen“
Lösung zum 7. Übungsblatt

Aufgabe 37:

a) $(x\wedge y)\vee(x\wedge\overline{y})\wedge(\overline{x}\wedge y)$

$= (x\wedge(y\vee\overline{y}))\vee(\overline{x}\wedge y)$

$= (x\wedge 1)\vee(\overline{x}\wedge y)$

$= x\vee(\overline{x}\wedge y)$

$= (x\vee\overline{x})\wedge(x\vee y)$

$= 1\wedge(x\vee y)$

$= x \vee y$

b) Wegen $a \wedge 0 = 0 \quad \forall a$ ist $f(0, y, z) = 0$. Weiterhin ist $f(1, y, z) = \overline{(\overline{1}\vee y)\vee\overline{z}}\wedge(1\vee y)$

$= \overline{(0\vee y)\vee\overline{z}}\wedge 1$

$= \overline{y\vee\overline{z}}\wedge 1$

$= \overline{y\vee\overline{z}}$

$= \overline{y}\wedge z$

Es folgt $f(x, y, z) = x\wedge\overline{y}\wedge z$.

Aufgabe 38:

Die disjunktive Normalform von β_5 ist offenbar $\overline{x}\wedge y$.

Es folgt (z.B.) $\beta_5(x, y) = \overline{x}\wedge y$

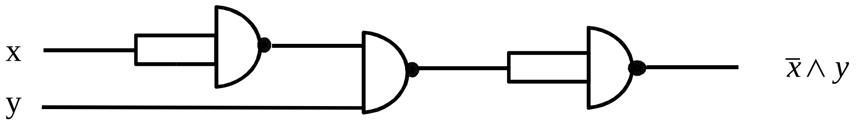
$= (\overline{x}\wedge y)\vee(\overline{x}\wedge y)$

$= \overline{\overline{(\overline{x}\wedge y)\vee(\overline{x}\wedge y)}}$

$= \overline{\overline{\overline{x}\wedge y}\vee\overline{\overline{x}\wedge y}}$

$= \overline{\overline{\overline{x\wedge x}\wedge y}\wedge\overline{\overline{x\wedge x}\wedge y}}$

$= \beta_{15}(\beta_{15}(\beta_{15}(x, x), y), \beta_{15}(\beta_{15}(x,x), y)$



Natürlich gibt es auch noch andere Realisierungen.

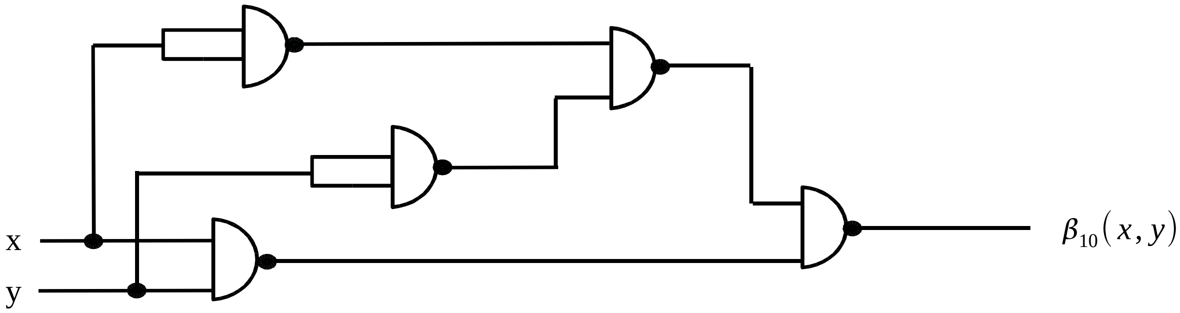
Die disjunktive Normalform von β_{10} ist offenbar $(x \wedge y) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y})$.

Also ist z.B. $\beta_{10}(x, y)$ $= (x \wedge y) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y})$

$= \overline{\overline{x \wedge y} \wedge \overline{\overline{x} \wedge \overline{y}}}$

$= \overline{\overline{x \wedge y} \wedge \overline{\overline{x \wedge x} \wedge \overline{y \wedge y}}}$

$= \beta_{15}(\beta_{15}(x, y), \beta_{15}(\beta_{15}(x,x), \beta_{15}(y,y)))$



Aufgabe 39:

Nach Definition der beteiligten Gatter wird (a, b, c) umgewandelt in

$\overline{(b \wedge c) \vee a} \vee b$, d.h. in

$= (\overline{b \wedge c} \wedge \overline{a}) \vee b$

$= ((\overline{b} \vee \overline{c}) \wedge \overline{a}) \vee b$

$= ((\overline{b} \vee \overline{c}) \vee b) \wedge (\overline{a} \vee b)$

$= ((\overline{b} \wedge b) \vee \overline{c}) \wedge (\overline{a} \vee b)$

$= (1 \vee \overline{c}) \wedge (\overline{a} \vee b)$

$= \quad (1 \vee \bar{c}) \wedge (\bar{a} \vee b)$

$= \quad 1 \wedge (\bar{a} \vee b)$ Wirkung ist unabhängig von c

$= \quad \bar{a} \vee b$

Aufgabe 40:

a) Es ist (x ∧ y) ∨ (x ∨ z) = ((x ∧ y) ∨ x) ∨ z = x ∨ z (Absorption)

Also gilt: $((x \wedge y) \vee (x \vee z)) \wedge (\bar{z} \vee (x \wedge \bar{y}))$

$= (x \vee z) \wedge (\bar{z} \vee (x \wedge \bar{y}))$

$= (x \vee z) \wedge (\bar{z} \vee (x \wedge \bar{y}))$

$= ((x \vee z) \wedge \bar{z}) \vee ((x \vee z) \wedge (x \wedge \bar{y}))$

$= ((x \wedge \bar{z}) \vee (z \wedge \bar{z})) \vee (((x \vee z) \wedge x) \wedge \bar{y})$

$= ((x \wedge \bar{z}) \vee 0) \vee (x \wedge \bar{y})$ (Absorption)

$= (x \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge \bar{y})$

$= x \wedge (\bar{z} \vee \bar{y})$

$= x \wedge \overline{y \wedge z}$

U N I V E R S I T Ä T
KOBLENZ · LANDAU

Fachbereich 3: Naturwissenschaften
M A T H E M A T I S C H E S I N S T I T U T
P r o f . D r . J . E c k h o f f

8. Übungsblatt zu "Diskrete algebraische Strukturen"

Ausgabe: 14.01.2002
Abgabe: 21.01.2002

43. Untersuchen Sie, ob die folgenden Verknüpfungen eine Halbgruppe, ein Monoid oder sogar eine Gruppe definieren:
    a) $(\mathbb{N} \cup \{0\}, *)$ mit $m * n := |m-n|$
    b) $(\mathbb{Z}, \circ)$ mit $m \circ n := |mn|$
    c) $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, *)$ mit $m * n := -mn$
    d) $(\mathbb{Q}, \cdot)$ mit $r \cdot s := r + s - rs$

44. Sei $M = \{a, b, c, d\}$ ein Monoid mit Nullelement, d.h. es existiere ein $0 \in M$ mit $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0 \quad \forall \quad x \in M$. Ist M durch das folgende Bruchstück einer Cayleytafel eindeutig bestimmt? Wenn ja: vervollständigen Sie die Tafel.

.	a	b	c	d
a				
b			b	
c		c		
d	d			

45. Sei $(G, \cdot)$ eine <u>endliche</u> Halbgruppe. Zeigen Sie: Gilt für alle $a, x, y \in G$
    $a \cdot x = a \cdot y \Rightarrow x = y$,
    $x \cdot a = y \cdot a \Rightarrow x = y$,
    so ist G eine Gruppe.

46. Erstellen Sie die Cayleytafeln der Gruppen
    a) S_3
    b) R_7
    Sind die Gruppen isomorph?

47. Es gibt 268.435.456 Möglichkeiten, die freien Felder der folgenden Tafel mit Buchstaben a, b, c, d zu belegen. Finden Sie die <u>einzige</u> Möglichkeit, die die Multiplikationstafel einer Gruppe auf {a, b, c, d} ergibt.

·	a	b	c	d
a		c		
b		a		
c				
d				

48. Sei $(G, \cdot)$ eine Halbgruppe. Zeigen Sie: sind die Gleichungen $a \cdot x = b$ mal $y \cdot a = b$ für alle $a, b \in G$ eindeutig lösbar, so ist G eine Gruppe.

Schriftlich zu bearbeiten und abzugeben sind die Aufgaben Nr. 43, 44 und 45.

„Diskrete algebraische Strukturen“
Lösung zum 8. Übungsblatt

Aufgabe 43:

a) – d) sind in der Tat Verknüpfungen!

a) „*“ ist nicht assoziativ: $(1 * 2) * 3 = ||1 - 2| - 3| = |1 - 3| = 2$

$1 * (2 * 3) = |1 - |2 - 3|| = |1 - 1| = 0$

b) Wegen $|| lm | n | = | l | mn ||$ ist „o“ assoziativ.

Ein wesentliches Element existiert für $n < 0$ wie $m \; o \; n = n$.

c) Wegen $- l(- mn) = - (-lm)n$ ist „*“ assoziativ.

Aus $- mn = m \;\; \forall m$ folgt: $n = - 1$, d.h. $- 1$ ist neutrales Element.

Aus $- mn = - 1$ folgt: $m = n = 1$ oder $m = n = -1$, d.h. nur 1 und – 1 sind invertierbar.

$(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, *)$ ist monoid, aber keine Gruppe.

d) „*“ ist assoziativ: $(r * s) * t = (r + s - rs) + t - (r + s - rs) * t = r + s + t - rs - rt - st + rst$

Der Ausdruck rechts ist symmetrisch in r, s, t, es folgt (wie bei der symm. Differenz):

$(r * s) * t = r * (s * t)$.

Aus $r * s = s \;\; \forall s$, d.h. $r + s - rs = s \;\; \forall s$, folgt $r = 0$; $(\mathbb{Q}, *)$ ist also monoid mit neutralem Element 0

Aus $r * s = 0$ folgt $r + s - rs = 0$, d.h. $r(s - 1) = s$, d.h. $r = s/(s-1)$ für $s \neq 1$. Also sind alle $s \neq 1$ invertierbar $(\mathbb{Q}, *)$ ist trotzdem keine Gruppe, weil $s = 1$ kein Inverses hat.

Aufgabe 44:

Wäre $b = 0$, müßten die Einträge in Spalte b stets b sein. Also ist $b \neq 0$. Analog gilt $a \neq 0$, $c \neq 0$. Also ist $d = 0$. Sei e das neutrale Element. Wegen $b * c = c$, $c * b \neq b$ gilt: $b \neq e$, $c \neq e$, also ist $a = e$. Damit ist bis auf b^2 und c^2 alles festgelegt.

Wegen $b^2 = (bc)b = b(cb) = bc = b$ und $c^2 = (cb)c = c(bc) = cb = c$ ist die Cayleytafel eindeutig bestimmt:

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	b	b	d
c	c	c	c	d
d	d	d	d	d

Aufgabe 45:

Sei etwa $G = \{a_1; ...; a_n\}$ und Sei $a \in G$ beliebig. Nach der ersten Kürzungsregel sind $a * a_1, ..., a * a_n$ paarweise verschieden, d.h. es ist auch $G = \{ a * a_1, ..., a * a_n\}$. Also existiert ein i mit $a * a_i = a$. Wegen $a * a_i * a = a * a$ ist auch (kürzen!) $a_i * a = a$. Weiter ist $a_i * (a * a_j) = (a_i * a) * a_j = a * a_j \ \forall j$, d.h. a_i ist linksneutral.

Da such $G = \{a_1 *a; ...; a_n * a\}$ gilt, ist a_i wegen $a * a_i = a$ auch rechtsneutral. Also ist $a_i = e$ neutrales Element.

Da ein k mit $a * a_k = a_i$ existiert, ist a_k invers zu a.

UNIVERSITÄT
KOBLENZ · LANDAU

Fachbereich 3: Naturwissenschaften
MATHEMATISCHES INSTITUT
Prof. Dr. J. Eckhoff

9. Übungsblatt zu “Diskrete algebraische Strukturen”

Ausgabe: 21.01.2002
Abgabe: 28.01.2002

49. Zeigen Sie: Die Menge G = $\{r+s\sqrt{2} \mid r, s \in \mathbb{Q}, (r, s) \neq (0, 0)\}$ ist mit der üblichen Multiplikation reeller Zahlen eine Gruppe.
(Ist G überhaupt eine Menge? Benutzen Sie, daß $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ist.)

50. Gegeben seien die Permutationen

$$a := \begin{pmatrix} 123456 \\ 514326 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 123456 \\ 254613 \end{pmatrix}$$

a) Geben Sie a und b in Zykelschreibweie an.
b) Welche Ordnungen haben a und b?
c) Berechnen Sie ab, ba, a^{1000}.
d) Lösen Sie die Gleichungen ax = b, ya = b.

51. a) Beweisen Sie: Eine Gruppe G mit der Eigenschaft $a^2 = e \quad \forall\, a \in G$ ist abelsch .
b) Konstruieren Sie eine derartige Gruppe mit 4 Elementen.

52. Zeigen Sie: Die Funktionen $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \frac{1}{1-x}$, $f_3(x) = 1 - \frac{1}{x}$, $f_4(x) = \frac{1}{x}$, $f_5(x) = 1 - x$, $f_6(x) = \frac{x}{x-1}$ von $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ auf sich bilden bzgl. Komposition eine Gruppe. Ist diese isomorph zu einer der Gruppen in Übungsaufgabe 46?

53. Ein Element von S_n heißt <u>gerade</u>, wenn die Anzahl der Zyklen gerader Längen in seiner Zykeldarstellung gerade ist, sonst <u>ungerade</u>.
a) Geben Sie die Elemente von S_4 in Zykelschreibweise an.
b) Welche Ordnungen haben die Elemente?
c) Welche Elemente sind gerade?
d) Bilden die geraden Elemente für sich genommen eine Gruppe?

54. Die Drehungen und Spiegelungen, die ein gegebenes Quadrat der Ebene in sich überführen, bilden eine Gruppe. Beschreiben Sie diese Gruppe als Permutationsgruppe der Eckenmenge des Quadrats.

Schriftlich zu bearbeiten und abzugeben sind die Aufgaben Nr. 49, 50 und 51.

„Diskrete algebraische Strukturen“
Lösung zum 9. Übungsblatt

Aufgabe 49:

G ist eine <u>Menge</u>:

Sei r + s $\sqrt{2}$ = p + q $\sqrt{2}$ mit r, s, p, q $\in \mathbb{Q}$.

Wäre q $\neq$ s, so folgte, $\sqrt{2} = \frac{r-p}{q-s} \in \mathbb{Q}$, ein Widerspruch.

Also ist q = s und damit r = p.

G ist eine Gruppe:

Aus r + s $\sqrt{2}$ = p + q $\sqrt{2} \in$ G folgt:

(r + s $\sqrt{2}$) (p + q $\sqrt{2}$) = rp + 2qs + (rq + sp) $\sqrt{2}$ $\in$ G.

Das neutrale Element ist 1 = 1 + 0 * $\sqrt{2}$, das Inverse von r + s $\sqrt{2}$ ist $\frac{1}{r+s\sqrt{2}}$

$\frac{1}{r+s\sqrt{2}} = \frac{r-s\sqrt{2}}{(r+s\sqrt{2})(r-s\sqrt{2})} = \frac{r-s\sqrt{2}}{r^2-2s^2} = \frac{r}{r^2-2s^2} - \frac{s}{r^2-2s^2}\sqrt{2}$ (man beachte: $r^2 - 2 s^2 \neq 0$)

Aufgabe 50:

a) a = (152)(34)(6) = (152)(34)
   b = (125)(346)

b) ord(a) = kgV(ord(152), ord(34), ord(6)) = kgV(3,2,1) = 6
   ord(b) = kgV(ord(125), ord(346)) = kgV(3,3) = 3

c) ab = (1)(2)(3)(46)(5) = (46)
   ba = (1)(2)(4)(5)(36) = (36)
   $a^{1000} = a^{996} * a^4 = e * a^4 = a^4 = (152)$ (wegen $a^6 = e$)

d) wegen $x = a^{-1} b$, $y = ba^{-1}$ berechnet man zunächst $a^{-1} = (125)(34)(6) = (125)(34)$

Es folgt $x = (152)(3)(46) = (152)(46)$

$y = (152)(36)(4) = (152)(36)$

Aufgabe 51:

a) Seien $a, b \in G$. Wegen $a^2 = b^2 = (ab)^2 = e$ ist $a^{-1} = a$, $b^{-1} = b$, $(ab)^{-1} = ab$. Es folgt $ab = (ab)^{-1} = a^{-1} b^{-1} = b^{-1} a^{-1} = ba$. Also ist G abgeschlossen.

b) Wir setzen G = {e, a, b, x} an; e soll das neutrale Element sein. Die Gruppentafel enthält dann:

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Also ist ab = c, denn ab = b würde a = e implizieren. Es folgt: ba = c; der Rest ergibt sich aus der Kürzungsregel: ac = ca = b, bc = cb = a.

Bis auf Isomorphie ist G die einzige Gruppe mit 4 Elementen, die die obige Eigenschaft hat. Sie heißt Klein´sche Vierergruppe V.

(Ein Beispiel mit $a^2 = e \;\; \forall a \in G$ ist auch $(P(M), \Delta)$; für $|M| = 2$ ergibt sich V.)

UNIVERSITÄT
KOBLENZ · LANDAU

Fachbereich 3: Naturwissenschaften
MATHEMATISCHES INSTITUT
Prof. Dr. J. Eckhoff

10. Übungsblatt zu "Diskrete algebraische Strukturen"

Ausgabe: 04.02.2002
Abgabe: 11.02.2002

55. Seien x, y Elemente einer Gruppe G. Zeigen Sie:
    a) $\mathrm{ord}\,(xyx^{-1}) = \mathrm{ord}\,(y)$
    b) $\mathrm{ord}\,(xy) = \mathrm{ord}\,(yx)$

56. Bestimmen Sie alle Untergruppen von
    a) S_3
    b) C_{12}

57. Bestimmen Sie alle Normalteiler von S_4, und konstruieren Sie die zugehörigen Faktorgruppen.

58. Zeigen Sie: Jede Gruppe mit n Elementen ist zu einer Untergruppe von S_n isomorph.

59. Bestimmen Sie alle Untergruppen der Ordnung 3, 4 und 6 von S_4.

60. Zeigen Sie: A_n ist Normalteiler von S_n. Ist S_3 Normalteiler von S_4?

Schriftlich zu bearbeiten und abzugeben sind dieAufgaben Nr. 55, 56 und 57.

„Diskrete algebraische Strukturen“
Lösung zum 10. Übungsblatt

Aufgabe 55:

a) Es ist $(xyx^{-1})^n = xy^n x^{-1}$ (die „inneren“ x^{-1} x kürzen sich heraus), d.h.(!) $y^n = e \Leftrightarrow (xyx^{-1})^n = e$.
Das bedeutet insbesondere $\mathrm{ord}(y) = \infty \Leftrightarrow \mathrm{ord}(xyx^{-1})^n = \infty$.

b) Es ist $(xy)^n = x(yx)^{n-1} y$. Aus $(xy)^n = e$ folgt also: $x^{-1}(xy)^n x = (yx)^n = e$, und umgekehrt. Wieder ist $\mathrm{ord}(xy) = \infty \Leftrightarrow \mathrm{ord}(yx) = \infty$.

Aufgabe 56:

a) $S_3 = \{(1)(2)(3), (12)(3), (13)(2), (23)(1), (123), (132)\}$

(die Ordnungen der Elemente sind 1, 2, 2, 2, 3, 3)

Triviale Untergruppen sind $U = \{(1)(2)(3)\}$ und $U = S_3$.

$|U| = 2$: $\{(1)(2)(3), (12)(3)\}$

$\{(1)(2)(3), (13)(2)\}$

$\{(1)(2)(3), (23)(1)\}$

$|U| = 3$: $\{(1)(2)(3), (123), (132)\}$

Andere Untergruppen gibt es nach dem Satz von Lagrange nicht.

b) $C_{12} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ (die Ordnungen der Elemente sind in dieser Reihenfolge 1, 12, 6, 4, 3, 12, 2, 12, 3, 4, 6, 12)

Es gibt in der Tat $\varphi(12) = 4$ Elemente der Ordnung 12 in C_{12} .

Triviale Untergruppen sind $U = \{0\}$; $U = C_{12}$; weiter ergeben sich:

$U = \{0, 6\}$

$U = \{0, 4, 8\}$

$U = \{0, 3, 6, 9\}$

$U = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$

Aufgabe 57:

Vgl. Übungsaufgabe 53.

Man rechnet nach, daß die <u>konjungierten Klassen</u> der S_4 gerade die 5 Klassen in Aufgabe 53 sind (konjungierte Elemente haben nach Aufgabe 55 dieselbe Ordnung, aber nicht umgekehrt). Die Kardinalitäten der Klassen sind 1, 6, 3, 8, 6.

Ein Normalteiler N von S_4 muß Untergruppe sein und aus ganzen konjungierten Klassen bestehen. Das läßt nach dem Satz von Lagrange nur folgende Möglichkeiten zu:

1. $|N| = 1$ $\quad N = \{(1)(2)(3)(4)\}$
2. $|N| = 4 = 1 + 3$ $\quad N = \{(1)(2)(3)(4), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$
   das ist abstrakt die Klein´sche Vierergruppe V
3. $|N| = 12 = 1 + 3 + 8$ $\quad N = A_4$ (vgl. Aufgabe 53)
4. $|N| = 24 = 1 + 6 + 3 + 8 + 6$ $\quad N = S_4$

Die Faktorengruppe S_4 / N ist nur für die Vierergruppe V_4 interessant $|S_4 / N| = 6$. Die Rechtsnebenklassen von N sind:

$N = \{(1)(2)(3)(4), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$

$N(12) = \{(12), (34), (1423), (1324)\}$

$N(13) = \{(13), (1432), (24), (1234)\}$

$N(23) = \{(23), (1243), (1342), (14)\}$

$N(123) = \{(123), (243), (142), (134)\}$

$N(132) = \{(132), (142), (234), (124)\}$

Sie multiplizieren sich also wie die Repräsentanten j, es ist $S_4 / V_4 \cong S_3$.

Hinweise

Die Korrektoren sind unter den folgenden mail-Adressen erreichbar:

Boost, Michael	m.boost@gmx.de
Groß, Günter	zeiger@uni-koblenz.de
Mo, Kim-Sun	civ@uni-koblenz.de

Die Übungsblätter und Lösungshinweise zu den jeweiligen Hausaufgaben finden Sie unter

www.uni-koblenz.de/~hupp